NEKE JEDNAČINE KOJE SE SVODE NA KVADRATNE

1) Bikvadratna jednačina

To je jednačina oblika: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ Uvodimo smenu $x^2 = t$, dobijamo jednačinu $at^2 + bt + c = 0$, nadjemo $t_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ i vratimo se u smenu:

$$x^2 = t_1 \quad \text{i} \quad x^2 = t_2$$
$$x_{1,2} = \pm\sqrt{t_1} \quad \text{i} \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{t_2}$$

Primer 1. Reši jednačinu $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

Rešenje:

$$x^4 - 4x^2 + 3 = 0 \Rightarrow \text{smena } x^2 = t$$
$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$a = 1$

$b = -4$

$c = 3$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$
$$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$
$$t_1 = \frac{4+2}{2} = 3$$
$$t_2 = \frac{4-2}{2} = 1$$

Vratimo se u smenu:

$$x^2 = t_1 \qquad\qquad x^2 = t_2$$
$$x^2 = 3 \qquad\qquad x^2 = 1$$
$$x_{1,2} = \pm\sqrt{3} \quad \text{i} \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{1}$$
$$x_1 = +\sqrt{3} \qquad\qquad x_3 = +1$$
$$x_2 = -\sqrt{3} \qquad\qquad x_4 = -1$$

Primer 2. Reši jednačinu $(4x^2-5)^2+(x^2+5)^2=2(8x^4-83)$

$$(4x^2-5)^2+(x^2+5)^2=2(8x^4-83)$$
$$16x^4-40x^2+25+x^4+10x^2+25=16x^4-166$$
$$x^4-30x^2+50+166=0$$
$$x^4-30x^2+216=0 \rightarrow \text{ Bikvadratna, smena: } x^2=t$$
$$t^2-30t+216=0$$

$a=1$

$b=-30$

$c=216$

$$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{30\pm\sqrt{900-864}}{2}$$
$$t_{1,2}=\frac{30\pm6}{2}$$
$$t_1=\frac{36}{2}=18$$
$$t_2=\frac{24}{2}=12$$

Vratimo se u smenu:

$x^2=18$	$x^2=12$
$x_{1,2}=\pm\sqrt{18}$	$x_{3,4}=\pm\sqrt{12}$
$x_{1,2}=\pm3\sqrt{2}$	$x_{3,4}=\pm2\sqrt{2}$
$x_1=+3\sqrt{2}$	$x_3=+2\sqrt{2}$
$x_2=-3\sqrt{2}$	$x_4=-2\sqrt{2}$

Primer 3. Reši jednačinu $(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)=3$

Ovo liči na bikvadratnu jednačinu, ali je mnogo bolje uzeti smenu: $x^2-2x=t$

$$\boxed{(x^2-2x)}^2-2\boxed{(x^2-2x)}=3$$

$$t^2-2t=3$$
$$t^2-2t-3=0 \quad \rightarrow$$

$a=1$

$b=-2$

$c=-3$

$$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$t_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm4}{2}$$
$$t_1=3$$
$$t_2=-1$$

Vratimo se sada u smenu:

$$\begin{array}{lcl} x^2-2x=t_1 & & x^2-2x=t_2 \\ x^2-2x=3 & \text{ili} & x^2-2x=-1 \\ x^2-2x-3=0 & & x^2-2x+1=0 \end{array}$$

Sada rešavamo dve nove kvadratne jednačine po x.

$$\begin{array}{llll} a=1 & x_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} & a=1 & x_{3,4}=\dfrac{2\pm\sqrt{4-4}}{2} \\ b=-2 & & b=-2 & \\ c=-3 & x_{1,2}=\dfrac{2\pm 4}{2} & c=1 & x_{3,4}=\dfrac{2\pm 0}{2} \\ & x_1=3 & & x_3=1 \\ & x_2=-1 & & x_4=1 \end{array}$$

Dakle, rešenja su: $\{3,-1,1,1\}$

<u>Primer 4.</u> Reši jednačinu $\quad x(x+1)(x+2)(x+3)=0{,}5625$

Ovo baš i ne liči na bikvadratnu jednačinu, a ne "vidi se'' da ima neka pametna smena.
Ako sve pomnožimo tek tad smo u problemu!
Probajmo da pomnožimo prva dva, i druga dva, da vidimo šta će da ispadne…

$$(x^2+x)(x^2+3x+2x+6)=0{,}5625$$
$$(x^2+x)(x^2+5x+6)=0{,}5625 \rightarrow \quad \text{Neće!}$$

Probajmo onda prvi i četvrti, a drugi i treći!

$$x(x+1)(x+2)(x+3)=0{,}5625$$

$$(x^2+3x)(x^2+2x+1x+2)=0{,}5625$$
$$(x^2+3x)(x^2+3x+2)=0{,}5625$$

E, ovo je već bolje $\Rightarrow$ Smena: $x^2+3x=t$

$$t\cdot(t+2)=0{,}5625$$
$$t^2+2t-0{,}5625=0$$

$$t_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+2,25}}{2}=\frac{-2\pm 2,5}{2}$$
$$t_1=+0,25$$
$$t_2=-2,25$$

Vratimo se u smenu:

$$x^2+3x=+0,25$$
$$x^2+3x-0,25=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+1}}{2}$$
$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{10}}{2}$$
$$x_1=\frac{-3+\sqrt{10}}{2}$$
$$x_2=\frac{-3-\sqrt{10}}{2}$$

ili

$$x^2+3x=+2,25$$
$$x^2+3x-2,25=0$$
$$x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{9-9}}{2}$$
$$x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{0}}{2}$$
$$x_3=x_4=-\frac{3}{2}$$

Primer 5. Reši jednačinu $\frac{x^2+x-5}{x}+\frac{3x}{x^2+x-5}+4=0$

$$\frac{x^2+x-5}{x}+\frac{3x}{x^2+x-5}+4=0$$
$$\frac{x^2+x-5}{x}+3\cdot\frac{x}{x^2+x-5}+4=0$$

Ovde je zgodno uzeti smenu $\frac{x^2+x-5}{x}=t$, jer je onda $\frac{x}{x^2+x-5}=\frac{1}{t}$

$$t+3\cdot\frac{1}{t}+4=0\,/\cdot t$$
$$t^2+3+4t=0$$
$$t^2+4t+3=0$$

$$t_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{-4\pm 2}{2}$$
$$t_1=-1$$
$$t_2=-3$$

Vratimo se u smenu:

$$\frac{x^2+x-5}{x}=-1 \quad \text{ili} \quad \frac{x^2+x-5}{x}=-3$$

$$x^2+x-5=-x$$
$$x^2+x-5+x=0$$
$$x^2+2x-5=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+20}}{2}$$
$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{24}}{2}$$
$$x_{1,2}=\frac{-2\pm2\sqrt{6}}{2}$$
$$x_{1,2}=\frac{2\left(-1\pm\sqrt{6}\right)}{2}$$
$$x_1=-1+\sqrt{6}$$
$$x_2=-1-\sqrt{6}$$

$$x^2+x-5=-3x$$
$$x^2+x-5+3x=0$$
$$x^2+4x-5=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16+20}}{2}$$
$$x_{1,2}=\frac{-4\pm6}{2}$$
$$x_3=1$$
$$x_4=-5$$

$\left\{-1+\sqrt{6},-1-\sqrt{6},1,-5\right\}$ su rešenja.

Binomne jednačine

To su jednačine oblika:

$$Ax^n \pm B=0$$

gde su $A>0$ i $B>0$

Najpre pokušamo da datu jednačinu rastavimo na činioce upotrebom poznatih formula, pa koristimo $M\cdot N=0 \Leftrightarrow M=0$ ili $N=0$

Uvek ovu jednačinu možemo rešiti smenom $x=y\sqrt[n]{\frac{B}{A}}$, koja binomnu jednačinu svede na oblik $y^n \pm 1=0$

Primer 1. Reši jednačinu $8x^3-27=0$

$$8x^3-27=0$$
$$(2x)^3-3^3=0$$

Pazi: Pogrešno je (jer se "gube" rešenja!)

$$8x^3=27$$
$$x^3=\frac{27}{8}$$
$$x=\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$$
$$x=\frac{3}{2}$$

Upotrebićemo formulu

$$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$$
$$(2x-3)((2x)^2+2x\cdot 3+3^2)=0$$
$$(2x-3)(4x^2+6x+9)=0 \Rightarrow \text{ odavde je:}$$

$$2x-3=0$$
$$2x=3$$
$$x_1=\frac{3}{2}$$

ili

$$4x^2+6x+9=0$$
$$x_{2,3}=\frac{-6\pm\sqrt{36-144}}{8}$$
$$x_{2,3}=\frac{-6\pm\sqrt{-108}}{8}=\frac{-6\pm 6\sqrt{3}i}{8}$$
$$x_2=\frac{-6+6\sqrt{3}i}{8}$$
$$x_3=\frac{-6-6\sqrt{3}i}{8}$$

$$x_2=\frac{-6+6\sqrt{3}i}{8}=\frac{2(-3+3\sqrt{3}i)}{8}=\frac{-3+3\sqrt{3}i}{4}$$
$$x_3=\frac{-6-6\sqrt{3}i}{8}=\frac{2(-3-3\sqrt{3}i)}{8}=\frac{-3-3\sqrt{3}i}{4}$$

PAZI: $\sqrt{-108}=\sqrt{108}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{36\cdot 3}\cdot i=6\sqrt{3}i$

Primer 2 Reši jednačinu $x^6 - 729 = 0$

$$x^6 - 729 = 0$$
$$x^6 - 3^6 = 0$$
$$(x^3)^2 - (3^3)^2 = 0 \to \text{ Razlika kvadrata}$$
$$(x^3 - 3^3)(x^3 + 3^3) = 0$$
$$(x-3)(x^2+3x+9)(x+3)(x^2-3x+9) = 0$$

$$x - 3 = 0 \quad \text{ili} \quad x^2 + 3x + 9 = 0 \quad \text{ili} \quad x + 3 = 0 \quad \text{ili} \quad x^2 - 3x + 9 = 0$$

$$\boxed{x_1 = 3} \qquad x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-36}}{2}$$

$$x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{-27}}{2} = \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{8}$$

$$\boxed{x_2 = \frac{-3 + 3\sqrt{3}i}{2}} \qquad \boxed{x_3 = \frac{-3 - 3\sqrt{3}i}{2}}$$

$$x + 3 = 0 \to \boxed{x_4 = -3} \qquad x^2 - 3x + 9 = 0 \to x_{5,6} = \frac{3 \pm \sqrt{9-36}}{2}$$

$$\boxed{x_5 = \frac{3 + 3\sqrt{3}i}{2}} \qquad \boxed{x_6 = \frac{3 - 3\sqrt{3}i}{2}}$$

PAZI: $\sqrt{-27} = \sqrt{27} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{9 \cdot 3} \cdot i = 3\sqrt{3}i$

Primer 3. Reši jednačinu: $5x^3 + 2 = 0$

Rešenje: Sad se ne može upotrebiti formula, pa idemo na smenu:

$x = y\sqrt[n]{\frac{B}{A}}$, kako je A=5, B=2, $n = 3$

smena je $x = y\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$

$$5 \cdot \left(y\sqrt[3]{\frac{2}{5}} \right)^3 + 2 = 0$$
$$5 \cdot y^3 \cdot \frac{2}{5} + 2 = 0$$
$$y^3 \cdot 2 + 2 = 0$$

$$2\cdot(y^3+1)=0 \Rightarrow y^3+1=0 \text{ (zbir kubova)}$$

$$(y+1)(y^2-y-1)=0$$

$$y+1=0$$

$$\boxed{y_1=-1}$$

Sad drugi činilac izjednačavamo sa nulom.

$$y^2-y-1=0$$

$$y_{2,3}=\frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}$$

$$y_{2,3}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$y_2=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$y_3=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

Vratimo se u smenu:

$$x=y\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$$

$$x_1=-1\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{5}}=-\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$$

$$x_2=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{5}} \quad \text{i} \quad x_3=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$$

Primer 4. Rešiti jednačinu $11x^4 - 17 = 0$

Rešenje: I ovde ne možemo lako datu jednačinu rastaviti na činioce; zato upotrebljavamo smenu: $x = y\sqrt[n]{\frac{B}{A}}$

Kako je $n = 4$, $B = 17$, $A = 11$ $\Rightarrow$ $x = y\sqrt[4]{\frac{17}{11}}$

$$11 \cdot \left(y\sqrt[4]{\frac{17}{11}} \right)^4 - 17 = 0$$

$$11 \cdot y^4 \frac{17}{11} - 17 = 0$$

$$17 \cdot y^4 - 17 = 0 \Rightarrow 17(y^4 - 1) = 0 \Rightarrow y^4 - 1 = 0 \to (y^2)^2 - 1 = 0$$

$$(y^2 - 1)(y^2 + 1) = 0$$

$$(y - 1)(y + 1)(y^2 + 1) = 0$$

$y - 1 = 0$ ili $y + 1 = 0$ ili $y^2 + 1 = 0$

$y_1 = 1$ $\quad y_2 = -1$ $\quad y^2 = -1$

$$y_{3,4} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

$$y_3 = +i$$

$$y_4 = -i$$

Vratimo se u smenu $x = y\sqrt[4]{\frac{17}{11}}$

$$x_1 = 1 \cdot \sqrt[4]{\frac{17}{11}} = \sqrt[4]{\frac{17}{11}}; \qquad x_2 = -1\sqrt[4]{\frac{17}{11}} = -\sqrt[4]{\frac{17}{11}}$$

$$x_3 = i\sqrt[4]{\frac{17}{11}}; \qquad x_4 = -i\sqrt[4]{\frac{17}{11}}$$

Trinomne jednačine

To su jednačine oblika

$$ax^{2n}+bx^{n}+c=0$$

gde su a,b i c realni brojevi (različite od nule).

Rešava se smenom $x^{n}=t\Rightarrow x^{2n}=t^{2}$. Rešavamo kvadratnu po t, pa se vratimo u smenu.

Primer 1: Reši jednačinu $x^{6}+7x^{3}-8=0$

Rešenje:

$$x^{6}+7x^{3}-8=0$$

$$(x^{3})^{2}+7x^{3}-8=0 \qquad \textbf{smena } x^{3}=t$$

$$t^{2}+7t-8=0$$

$$t_{1,2}=\frac{-7\pm 9}{2}$$

$$t_{1}=1$$

$$t_{2}=-8$$

Vratimo se u smenu:

$$x^{3}=1$$

$$x^{3}-1=0$$

$$(x-1)(x^{2}+x+1)=0$$

$$x-1=0 \quad \text{ili} \quad x^{2}+x+1=0$$

$$x_{1}=1 \qquad x_{2,3}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

ili

$$x^{3}=-8$$

$$x^{3}+8=0$$

$$x^{3}+2^{3}=0$$

$$(x+2)(x^{2}-2x+4)=0$$

$$x+2=0 \quad \text{ili} \quad x^{2}-2x+4$$

$$x_{4}=-2$$

$$x_{5,6}=\frac{2\pm\sqrt{-12}}{2}$$

$$x_{5,6}=\frac{2\pm 2\sqrt{3}i}{2}$$

$$x_{5,6}=1\pm\sqrt{3}i$$

Primer 2. Rešiti jednačinu: $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$

Rešenje:

$$x^8 - 17x^4 + 16 = 0$$

$$(x^4)^2 - 17x^4 + 16 = 0 \qquad \text{smena: } x^4 = t$$

$$t^2 - 17t + 16 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{17 \pm 15}{2}$$

$$t_1 = 16$$

$$t_2 = 1$$

Vratimo se u smenu:

$x^4 = 16$ ili $x^4 = 1$

$$x^4 - 16 = 0$$

$$x^4 - 2^4 = 0$$

$$(x^2 - 2^2)(x^2 + 2^2) = 0$$

$$(x-2)(x+2)(x^2+4) = 0$$

$x - 2 = 0$ ili $x + 2 = 0$ ili $x^2 + 4 = 0$

$x_1 = 2$, $x_2 = -2$

$$x^2 = -4$$

$$x_{3,4} = \pm\sqrt{-4}$$

$$x_3 = +2i$$

$$x_4 = -2i$$

$$x^4 - 1 = 0$$

$$(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$$

$$(x-1)(x+1)(x^2+1) = 0$$

$x - 1 = 0$ ili $x + 1 = 0$ ili $x^2 + 1 = 0$

$x_5 = 1$, $x_6 = -1$

$$x^2 = -1$$

$$x_{7,8} = \pm\sqrt{-1}$$

$$x_7 = +i$$

$$x_8 = -i$$

Dakle rešenja su:

$$\{2, -2, 2i, -2i, 1, -1, +i, -i\}$$

Simetrične (recipročne) jednačine

To su jednačina oblika:

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + ... + cx^2 + bx + a = 0$$

Gde su $a, b, c...$ realni brojevi. Naziv simetrične potiče jer su koificijenti uz x^{n-k} i x^k $(k = 0,1,2...n)$ jednaki.

Drugo ime recipročne su dobile zbog osobina: Ako je $x = \alpha$ jedno rešenje, onda je i $x = \frac{1}{\alpha}$ takodje rešenje date jednačine i važi osobina: Ako je najveći stepen $n -$ neparan broj, tada je $x_1 = -1$ jedno rešenje simetrične jednačine!!!

Postupak rešavanja

- Ako je jednačina neparnog stepena podelimo je sa $(x+1)$ i dobijemo jednačinu parnog sistema

- Celu jednačinu podelimo sa "srednjim'' članom i grupišemo odgovarajuće članove.

- Uzimamo smenu $\boxed{x + \frac{1}{x} = t}$, ovde kvadriramo i dobijamo:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = t^2$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = t^2$$

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = t^2$$

$$\boxed{x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2 \rightarrow \textbf{ZAPAMTI}}$$

Još je česta i situacija:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 = t^3$$

$$x^3 + 2x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3x + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = t^3$$

$$x^3 + 3x + 3\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} = t^3$$

$$x^3 + 3\left(x+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^3} = t^3$$

$$\boxed{x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t} \rightarrow \underline{\textbf{ZAPAMTI}}$$

itd…

Primer 1. Rešiti jednačinu: $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$

Rešenje:

Ovo je jednačina parnog stepena , pa najpre:

celu jednačinu delimo sa x^2 jer je on srednji član.

$$\frac{2x^4}{x^2} + \frac{3x^3}{x^2} - \frac{-16x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} + \frac{2}{x^2} = 0$$

$2x^2 + 3x - 16 + 3 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x^2} = 0$ grupišemo članove!!!

$2\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 16 = 0$ smena: $x + \frac{1}{x} = t$

$$2(t^2 - 2) + 3t - 16 = 0$$

$$2t^2 - 4 + 3t - 16 = 0$$

$$2t^2 + 3t - 20 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+160}}{4} = \frac{-3 \pm 13}{4}$$

$$t_1 = -4, \quad t_2 = \frac{5}{2}$$

Vratimo se u smenu:

$$x+\frac{1}{x}=-4$$
$$x^2+1=-4x$$
$$x^2+4x+1=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-4}}{2}$$
$$x_1=-2+\sqrt{3}$$
$$x_2=-2-\sqrt{3}$$

ili

$$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$$
$$2x^2+2=5x$$
$$2x^2-5x+2=0$$
$$x_{3,4}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}$$
$$x_3=2$$
$$x_4=\frac{1}{2}$$

Dakle, rešenja su 2 i $\frac{1}{2}$, $-2+\sqrt{3}$ i $-2-\sqrt{3}$ i **recipročna su!** Za 2 i $\frac{1}{2}$ je to očigledno, a šta je sa $-2+\sqrt{3}$ i $-2-\sqrt{3}$?

$$\frac{-2+\sqrt{3}}{1}=\frac{-2+\sqrt{3}}{1}\cdot\frac{-2-\sqrt{3}}{-2-\sqrt{3}}=\frac{(-2)^2-\sqrt{3}}{-2-\sqrt{3}}=\frac{1}{-2-\sqrt{3}}$$

Sad vidimo (posle racionalizacije) da su i ona takodje recipročna.

<u>Primer 2.</u> Rešiti jednačinu:

$$12x^5+16x^4-37x^3-37x^2+16x+12=0$$

<u>Rešenje</u>:

Ovo je jednačina petog stepena, pa je jedno rešenje $x=-1$, pa ćemo celu jednačinu podeliti sa $(x+1)$

$$(12x^5+16x^4-37x^3-37x^2+16x+12):(x+1)=12x^4+4x^3-41x^2+4x+12$$

Pogledaj deljenje polinoma – fajl polinomi iz I godine

Dalje radimo:

$$12x^4+4x^3-41x^2+4x+12=0\,/:x^2$$
$$12x^2+4x-41+4\cdot\frac{1}{x}+12\cdot\frac{1}{x^2}=0$$

$$12\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-41=0$$

Smena $x+\frac{1}{x}=t \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$

$$12(t^2-2)+4t-41=0$$
$$12t^2-24+4t-41=0$$
$$12t^2+4t-65=0$$
$$t_{1,2}=\frac{-4\pm 56}{24}$$
$$t_1=\frac{13}{6}$$
$$t_2=-\frac{5}{2}$$

Vratimo se u smenu:

$$x+\frac{1}{x}=\frac{13}{6}$$
$$6x^2-13x+6=0$$
$$x_{1,2}=\frac{13\pm 5}{12}$$
$$x_1=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}$$
$$x_2=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

i

$$x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2}$$
$$2x^2+5x+2=0$$
$$x_{3,4}=\frac{-5\pm 3}{4}$$
$$x_3=-\frac{1}{2}$$
$$x_4=-2$$

Dakle: $\left\{\frac{3}{2},\frac{2}{3},-\frac{1}{2},-2,-1\right\}$ su rešenja.

Veoma slične simetričnim su KOSOSIMETRIČNE jednačine, one su oblika $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+...-cx^2-bx-a=0$ tj. koeficijenti uz x^k i x^{n-k} su suprotni koeficijenti

Ako je kososimetrična jednačina neparnog sistema, jedno rešenje je uvek $x_1=1$
Postupak rešavanja je sličan!!!

Primer 3. Reši jednačinu $x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 16x^2 + 7x - 1 = 0$

$$x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 16x^2 + 7x - 1 = 0 \quad \underline{\text{kososimetrična}}$$

Pošto je njeno rešenje $x_1 = 1$, celu jednačinu delimo sa $(x-1)$

$$(x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 16x^2 + 7x - 1):(x-1) = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 1$$

Dobijena jednačina:

$$x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 1 = 0 \text{ je simetrična } / : x^2$$
$$x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 1 = 0$$
$$x^2 - 6x + 10 - 6 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

itd…

Dobijena rešenja su $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 2 + \sqrt{3}, x_4 = 2 - \sqrt{3}$ i $x_5 = 1$