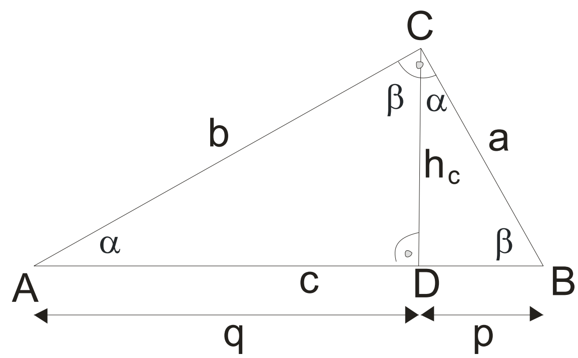
PRIMENE SLIČNOSTI NA PRAVOUGLI TROUGAO

Nacrtajmo jedan pravougli trougao sa standardnim obeležavanjima:

a,b su katete
c je hipotenuza
h_c je hipotenuzina visina
p i q su odsečci na hipotenuzi koje pravi visina h_c



Hipotenuzina visina CD deli trougao ABC na dva pravougla trougla : ADC i BDC. Možemo uočiti da sva tri pravougla trougla imaju iste uglove α, β i $\gamma = 90^0$, pa su medjusobno **slični**.

Iz njihove sličnosti proizilazi proporcionalnost odgovarajućih stranica koja može da se formuliše kao :

i) **Hipotenuzina visina je geometrijska sredina odsečaka koje sama odseca na hipotenuzi, to jest** $\boxed{h_c = \sqrt{p \cdot q}}$

ii) **Kateta je geometrijska sredina hipotenuze i bližeg odsečka hipotenuze, to jest** $\boxed{a = \sqrt{c \cdot p}}$ i $\boxed{b = \sqrt{c \cdot q}}$
(ovo je Euklidov stav)

iii) Trougao ABC je pravougli ako i samo ako je $\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$ **(ovo je Pitagorina teorema)**

Dakle, sad za pravougli trougao znamo sledeće formule:

$a^2 + b^2 = c^2$

$p + q = c$

$h_c = \sqrt{p \cdot q} \rightarrow h_c^2 = p \cdot q$

$a = \sqrt{c \cdot p} \rightarrow a^2 = c \cdot p$

$b = \sqrt{c \cdot q} \rightarrow b^2 = c \cdot q$

$h_c^2 + p^2 = a^2$

$h_c^2 + q^2 = b^2$

$O = a + b + c \rightarrow obim$

$P = \frac{a \cdot b}{2}$ ili $P = \frac{c \cdot h_c}{2} \rightarrow$ površina

$h_c = \frac{a \cdot b}{c} \rightarrow$ hipotenuzina visina

$R = \frac{c}{2} = t_c \rightarrow$ poluprečnik opisane kružnice koji se nalazi na sredini hipotenuze

$r = \frac{a + b - c}{2} \rightarrow$ poluprečnik upisane kružnice

Primer 1.

Odrediti nepoznate elemente skupa $\{a,b,c,p,q,h_c\}$ **ako je poznato:**

i) $p=16cm$, $q=9cm$

ii) $a=130cm$, $b=312cm$

Rešenje:

i) $p=16cm$, $q=9cm$

Koristimo formulice tako što prvo pronadjemo onu gde nam se javljaju dati elementi:

$$a^2+b^2=c^2$$
$$p+q=c$$
$$h_c^{\,2}=p\cdot q$$
$$a^2=c\cdot p$$
$$b^2=c\cdot q$$
$$h_c^{\,2}+p^2=a^2$$
$$h_c^{\,2}+q^2=b^2$$

$$p=16cm$$
$$q=9cm$$
$$p+q=c\rightarrow c=16+9\rightarrow \boxed{c=25cm}$$
$$h_c=\sqrt{pq}\rightarrow h_c=\sqrt{16\cdot 9}=4\cdot 3\rightarrow \boxed{h_c=12cm}$$
$$a=\sqrt{c\cdot p}\rightarrow a=\sqrt{25\cdot 16}=5\cdot 4\rightarrow \boxed{a=20cm}$$
$$b=\sqrt{c\cdot q}\rightarrow b=\sqrt{25\cdot 9}=5\cdot 3\rightarrow \boxed{b=15cm}$$

ii) $a=130cm$, $b=312cm$

$$a^2+b^2=c^2\rightarrow c^2=130^2+312^2\rightarrow c^2=16900+97344\rightarrow c^2=114244\rightarrow \boxed{c=338cm}$$
$$a^2=c\cdot p\rightarrow p=\frac{a^2}{c}=\frac{16900}{338}\rightarrow \boxed{p=50cm}$$
$$p+q=c\rightarrow q=c-p\rightarrow q=338-50\rightarrow \boxed{q=288cm}$$
$$h_c=\sqrt{p\cdot q}\rightarrow h_c=\sqrt{50\cdot 228}\rightarrow h_c=\sqrt{14400}\rightarrow \boxed{h_c=120cm}$$

$\boxed{\text{Primer 2.}}$

Dokazati da u pravouglom trouglu važi jednakost: $\dfrac{1}{h_c^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$

<u>Rešenje:</u>

Krenućemo od desne strane jednakosti i doći do leve:

$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{b^2+a^2}{a^2\cdot b^2}$ u brojiocu imamo $\boxed{a^2+b^2=c^2}$ pa to zamenimo …

$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{b^2+a^2}{a^2\cdot b^2}=\dfrac{c^2}{a^2\cdot b^2}$ prebacimo brojilac ispod imenioca(osobina dvojnog razlomka)…

$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{b^2+a^2}{a^2\cdot b^2}=\dfrac{c^2}{a^2\cdot b^2}=\dfrac{1}{\frac{a^2\cdot b^2}{c^2}}=\dfrac{1}{\left(\frac{a\cdot b}{c}\right)^2}$ znamo da je $h_c=\dfrac{a\cdot b}{c}\rightarrow$ hipotenuzina visina

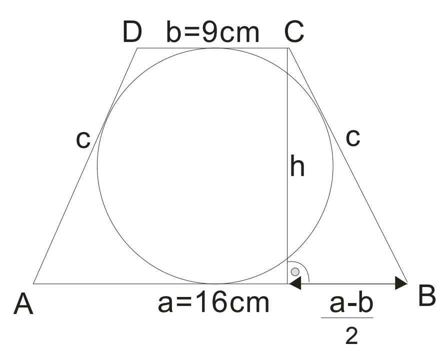
$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{b^2+a^2}{a^2\cdot b^2}=\dfrac{c^2}{a^2\cdot b^2}=\dfrac{1}{\frac{a^2\cdot b^2}{c^2}}=\dfrac{1}{\left(\frac{a\cdot b}{c}\right)^2}=\dfrac{1}{h_c^2}$ ovim je dokaz završen.

$\boxed{\text{Primer 3.}}$

U jednakokrakom trapezu osnovica 16cm i 9cm upisana je kružnica. Izračunati poluprečnik kružnice.

<u>Rešenje:</u>

Da najpre nacrtamo sliku i postavimo problem:



Pošto se radi o tangentnom četvorouglu, znamo da zbir naspramnih stranica mora biti jednak. To ćemo iskoristiti da nadjemo dužinu kraka c.

$a+b=2c$

$16+9=2c$

$2c=25 \rightarrow \boxed{c=\frac{25}{2}cm}$

Sad primenimo Pitagorinu teoremu da nađemo dužinu visine:

$$h^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=c^2 \rightarrow h^2=\left(\frac{25}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2 \rightarrow h^2=\frac{625}{4}-\frac{49}{4}$$

$$h^2=\frac{576}{4} \rightarrow h^2=144 \rightarrow \boxed{h=12cm}$$

Znamo da je poluprečnik upisane kružnice jednak polovini visine:

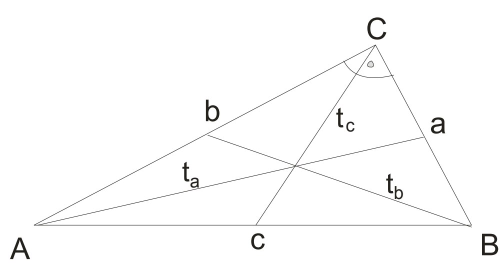
$r=\frac{h}{2} \rightarrow r=\frac{12}{2} \rightarrow \boxed{r=6cm}$ i evo rešenja.

Primer 4.

Dokazati da u svakom pravouglom trouglu za težištne duži važi jednakost: $t_a^2+t_b^2=5\cdot t_c^2$

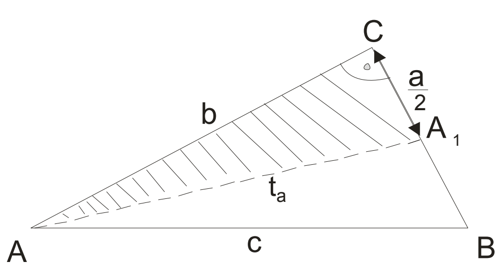
<u>Rešenje:</u>

Nacrtajmo najpre sliku :



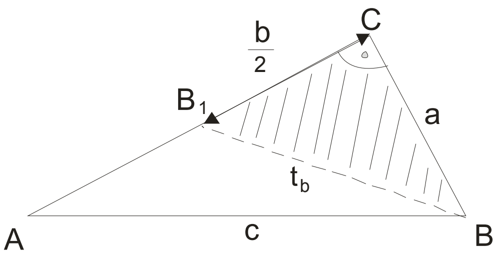
Ideja je da dva puta primenimo Pitagorinu teoremu.

Prvo primenjujemo na obeleženi trougao:



$$t_a^2=b^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Sad na drugu stranu:



$$t_b^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Saberimo ove dve jednakosti:

$$\left.\begin{cases} t_a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ t_b^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \end{cases}\right\} \text{ saberemo ih...}$$

$$t_a^2 + t_b^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$t_a^2 + t_b^2 = b^2 + \frac{a^2}{4} + a^2 + \frac{b^2}{4}$$

$$t_a^2 + t_b^2 = \frac{4b^2 + a^2 + 4a^2 + b^2}{4}$$

$$t_a^2 + t_b^2 = \frac{5a^2 + 5b^2}{4}$$

$$t_a^2 + t_b^2 = \frac{5(a^2 + b^2)}{4}$$

U brojiocu zamenimo $a^2 + b^2$ sa c^2 iz Pitagorine teoreme...

$$t_a^2 + t_b^2 = \frac{5 \cdot c^2}{4}$$

Ovde malo prepakujemo:

$$t_a^2 + t_b^2 = 5 \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

Znamo da je $t_c = \frac{c}{2}$

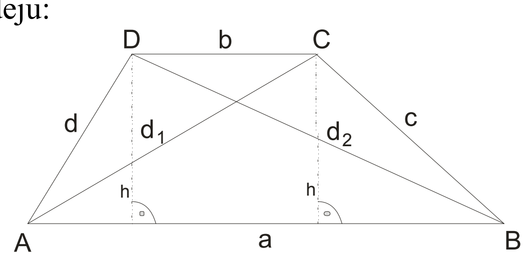
$$\boxed{t_a^2 + t_b^2 = 5 \cdot t_c^2}$$

Primer 5.

Ako su *a* i *b* osnovice, *c* i *d* kraci, a d_1 i d_2 dijagonale trapeza, tada važi: $d_1^2 + d_2^2 = c^2 + d^2 + 2ab$. Dokazati.

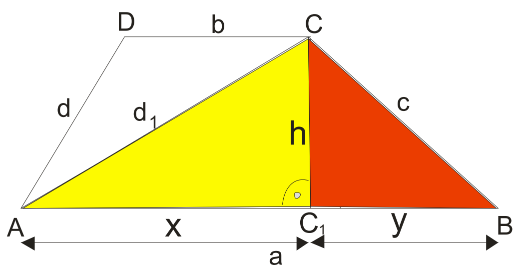
Rešenje:

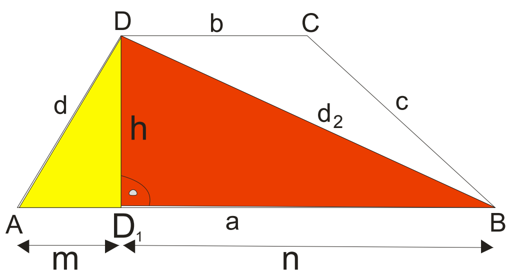
Kao i uvek, nacrtamo sliku i tražimo ideju:



I ovde ćemo upotrebiti Pitagorinu teoremu.

Izrazimo visinu trapeza *h* sa iz žutog i iz crvenog trougla, pa to uporedimo:





$$h^2 = d_1^2 - x^2 \wedge h^2 = c^2 - y^2$$
$$d_1^2 - x^2 = c^2 - y^2$$
$$d_1^2 = c^2 + x^2 - y^2$$
$$d_1^2 = c^2 + (x+y)(x-y)$$
$$d_1^2 = c^2 + \underbrace{\boxed{(x+y)}}_{a}(x-y)$$
$$d_1^2 = c^2 + a(x-y)$$

$$h^2 = d^2 - m^2 \wedge h^2 = d_2^2 - n^2$$
$$d_2^2 - n^2 = d^2 - m^2$$
$$d_2^2 = d^2 + n^2 - m^2$$
$$d_2^2 = d^2 + (n+m)(n-m)$$
$$d_2^2 = d^2 + \underbrace{\boxed{(n+m)}}_{a}(n-m)$$
$$d_2^2 = d^2 + a(n-m)$$

Sad ćemo sabrati ove dve jednakosti:

$$\left\{\begin{array}{l} d_1^2 = c^2 + a(x-y) \\ \underline{d_2^2 = d^2 + a(n-m)} \end{array}\right\} \text{ saberemo ih...}$$

$$d_1^2 + d_2^2 = c^2 + d^2 + a(x-y) + a(n-m)$$
$$d_1^2 + d_2^2 = c^2 + d^2 + \boxed{a}(x-y) + \boxed{a}(n-m) \rightarrow a \text{ ispred zagrade ...}$$
$$d_1^2 + d_2^2 = c^2 + d^2 + a(x-y+n-m) \rightarrow \text{pretumbamo ovo u zagradi...}$$
$$d_1^2 + d_2^2 = c^2 + d^2 + a(x-m+n-y)$$
$$d_1^2 + d_2^2 = c^2 + d^2 + a(\boxed{x-m} + \boxed{n-y}) \rightarrow \text{pogledajmo sliku: ovi uokvireni daju } b$$
$$d_1^2 + d_2^2 = c^2 + d^2 + a(b+b)$$
$$\boxed{d_1^2 + d_2^2 = c^2 + d^2 + 2ab}$$

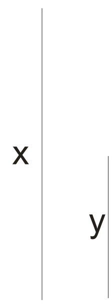
Evo par primera konstrukcija traženih duži.

Primer 1.

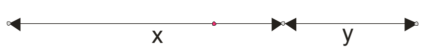
Date su duži *x* i *y*. Konstruisati geometrijsku sredinu tih duži, to jest konstruisati $\sqrt{x \cdot y}$

<u>Rešenje:</u>

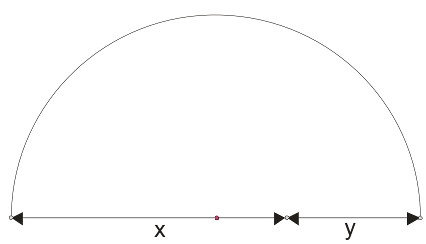
Najpre ćemo nacrtati dve proizvoljne duži:



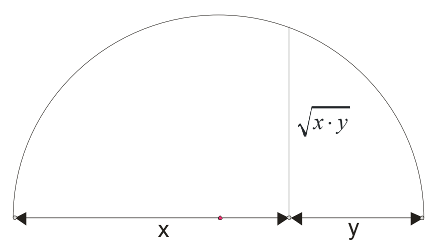
Njih zatim spojimo (postavimo jednu do druge), što je prikazano na **slici 1**.



slika 1.



slika 2.

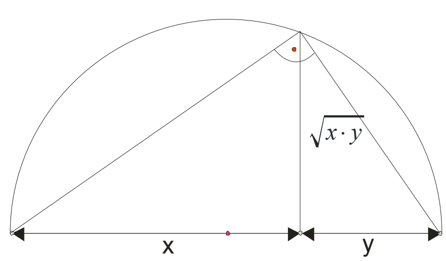


slika 3.

Nadjemo sredinu duži $x + y$ i opišemo polukrug (**slika 2.**). Iz mesta preseka duži podignemo normalu (**slika 3.)**

Ta normala je rešenje, to jest ona je geometrijska sredina datih duži.   **Zašto?**

Pa znamo da se centar opisane kružnice kod pravouglog trougla nalazi na sredini hipotenuze a da je visina geometrijska sredina odsečaka...



Primer 2.

Konstruisati duž čija dužina u odnosu na datu jediničnu duž (vi kad vežbate uzmite jediničnu duž 1 cm) iznosi:

a) $\sqrt{15}$

b) $\sqrt{7}$

<u>Rešenje:</u>

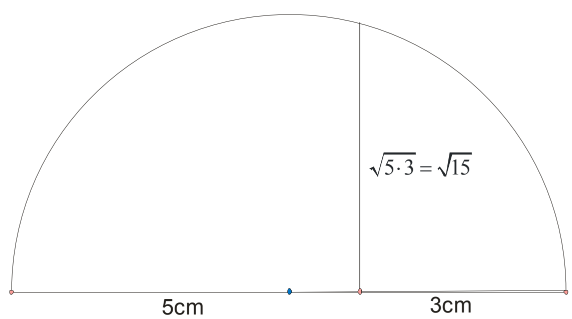
a) $\sqrt{15}$

Ideja kod ovog tipa zadatka je da se podkoreni broj napiše kao proizvod dva broja (bilo koja) i da se primeni znanje o konstrukciji geometrijske sredine:

$\sqrt{15} = \sqrt{5 \cdot 3}$

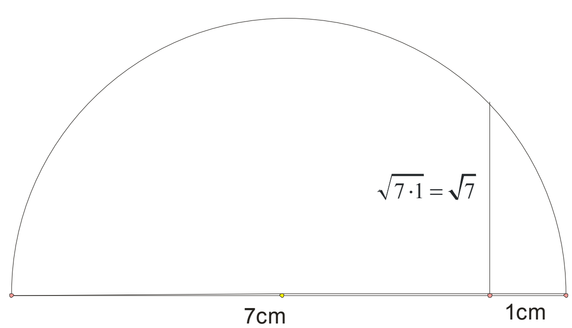
Dakle, uzmemo duži od 5cm i 3 cm, nacrtamo ih jednu do druge, nadjemo sredinu(na 4 cm) i opišemo polukrug.

Iz mesta preseka ove dve duži izdignemo normalu do preseka sa polukrugom i njena vrednost je $\sqrt{15}$.



b) $\sqrt{7}$

Slično: $\sqrt{7} = \sqrt{7 \cdot 1}$



Primer 3.

Date su duži čije su dužine a i *b*. Konstruisati duž dužine:

a) $x = \sqrt{a^2 + b^2}$

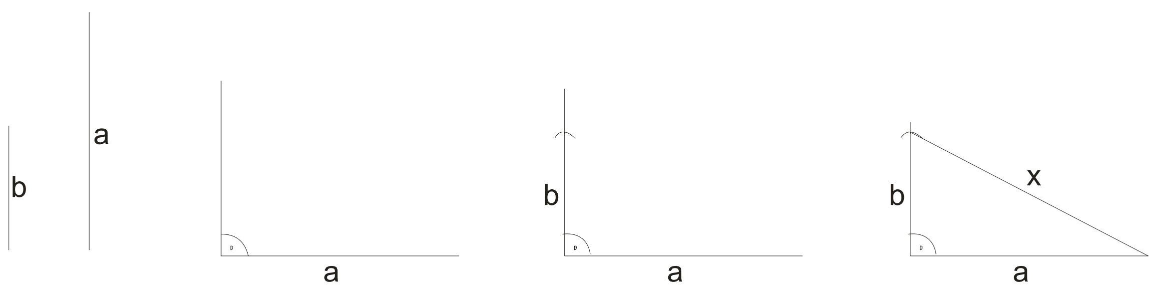
b) $y = \sqrt{a^2 - b^2}$

Rešenje:

a) $x = \sqrt{a^2 + b^2}$

Ako kvadriramo ovu jednakost , dobijamo: $x = \sqrt{a^2 + b^2} \rightarrow x^2 = a^2 + b^2$

Odavde zaključujemo da je tražena duž ustvari **hipotenuza** pravouglog trougla čije su katete a i *b*.



slika 1. slika 2. slika 3.

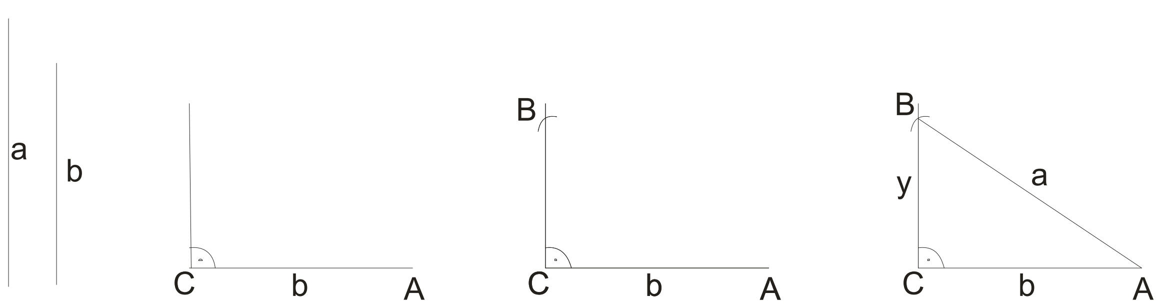
Uzmemo proizvoljne duži a i b. Prenesemo duž a i konstruišemo prav ugao (slika 1.)

Na toj polupravi nanesemo dužinu b (slika 2.) I kad to spojimo eto tražene duži .(slika 3.)

b) $y = \sqrt{a^2 - b^2}$

Kvadriramo i dobijemo: $y = \sqrt{a^2 - b^2} \rightarrow y^2 = a^2 - b^2$

Ovde je dakle tražena duž kateta pravouglog trougla sa **hipotenuzom** *a* i **katetom** b.



slika 1. slika 2. slika 3.

Na duž b konstruišemo prav ugao u temenu C. Iz temena A presečemo tu polupravu dužinom a. Dobili smo trougao ABC, gde je kateta y rešenje našeg zadatka.

Primer 4.

Date su proizvoljne duži a,b i c. Konstruisati duž:

$i) \quad x=\sqrt{ab+c^2}$

$ii) \quad y=\sqrt{a^2-bc}$

Rešenje:

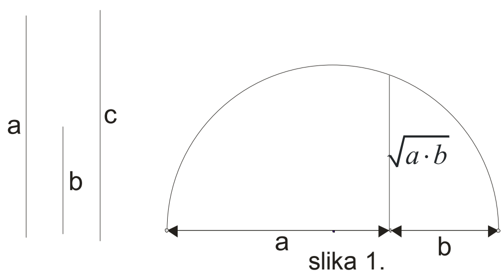
Ovi zadaci su ustvari kombinacija prethodnih, to jest koristi se i geometrijska sredina a i konstrukcija pravouglog trougla. Datu jednakost prvo malo prepravimo…

$x=\sqrt{ab+c^2}$ kvadriramo

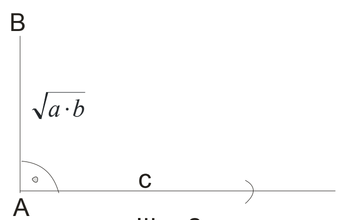
$x^2=ab+c^2$

$\boxed{x^2=(\sqrt{ab})^2+c^2}$

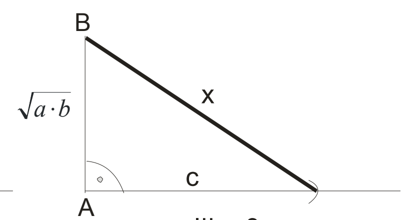
Prvo ćemo konstruisati $\sqrt{ab}$, a zatim pravougli trougao sa katetama $\sqrt{ab}$ i c . Hipotenuza tog trougla je tražena duž.



slika 1.



slika 2.



slika 3.

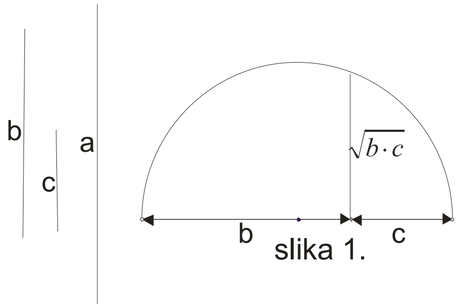
$ii) \quad y=\sqrt{a^2-bc}$

$y=\sqrt{a^2-bc}$ kvadriramo

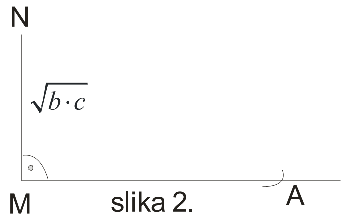
$y^2=a^2-bc$

$\boxed{y^2=a^2-(\sqrt{bc})^2}$

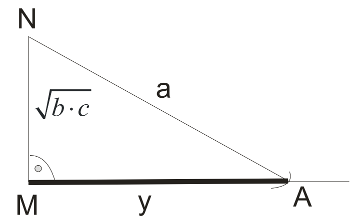
Najpre konstruišemo $\sqrt{bc}$ a zatim pravougli trougao sa katetom $\sqrt{bc}$ i hipotenuzom dužine a. Sad je tražena duž kateta tog trougla.



slika 1.



slika 2.



slika 3.