LINEARNE NEJEDNAČINE

Linearne nejednačine rešavamo slično kao i jednačine (vidi linearne jednačine) koristeći ekvivalentne transformacije. **Važno je reći da se smer nejednakosti menja kada celu nejednačinu množimo (ili delimo) negativnim brojem.**

Primer:

$$\underline{2x < 10}$$
$$x < \frac{10}{2}$$
$$x < 5$$

$$\underline{-2x < 10}$$

Pazi: delimo sa (-2), moramo okrenuti smer nejednakosti

$$x > \frac{10}{-2}$$
$$x > -5$$

Naravno i ovde se može deliti da nejednačina ima rešenja, nema rešenja ili ih pak ima beskonačno mnogo (u zavisnosti u kom skupu brojeva posmatramo datu nejednačinu)

1) Reši nejednačinu: $3(x-2)+9x<2(x+3)+8$

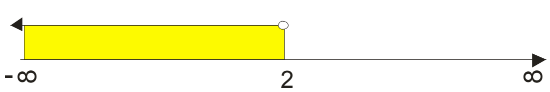
$3(x-2)+9x<2(x+3)+8$ → oslobodimo se zagrada

$3x-6+9x<2x+6+8$ → nepoznate na jednu, poznate na drugu stranu

$$3x+9x-2x<6+8+6$$
$$10x<20$$
$$x<\frac{20}{10}$$
$$\boxed{x<2}$$

Uvek je ‘’problem’’ kako zapisati skup rešenja?

Možemo zapisati $\{x \in R \mid x<2\}$ a ako je potrebno to predstaviti i na brojevnoj pravoj:



$x \in (-\infty, 2)$

Pazi:

Kad $+\infty$ i $-\infty$ uvek idu male zagrade ( )
Kod znakova $<$ i $>$ male zagrade i prazan kružić
Kod $\leq$, $\geq$ idu srednje zagrade $[\ ]$ i pun kružić

Male zagrade nam govore da ti brojevi nisu u skupu rešenja, dok $[,]$ govore da su i ti brojevi u rešenju.

2) Reši nejednačinu: $\frac{2a+1}{3}-\frac{3a-2}{2}\geq -1$

$\frac{2a+1}{3}-\frac{3a-2}{2}\geq -1$ → celu nejednačinu pomnožimo sa 6 (NZS za 3 i 2)

$2(2a+1)-3(3a-2)\geq -6$

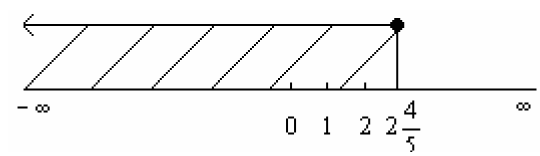
$4a+2-9a+6\geq -6$

$4a-9a\geq -6-2-6$

$-5a\geq -14$ → pazi: delimo sa (-5) pa se znak okreće

$a\leq \frac{-14}{-5}$

$a\leq +2\frac{4}{5}$



U skupu R su rešenja $a\in\left(-\infty,2\frac{4}{5}\right]$

PAZI: Da nam npr. traže rešenja u skupu N (prirodni brojevi), onda bi to bili samo $\{1,2\}$

3) Reši nejednačinu: $2x+a>ax-3$

$2x+a>ax-3$ → nepoznate na jednu, poznate na drugu stranu

$2x-ax>-3-a$

$x(2-a)>-3-a$

Kako sad?

Da li je izraz $2-a$ pozitivan ili negativan, ili možda nula? Moramo ispitati sve 3 situacije!

$x(2-a)>-3-a$

$2-a>0$	$2-a<0$	$2-a=0$
$a<2$	$a>2$	$a=2$
$x>\frac{-3-a}{2-a}$	okreće se znak	$0x>-3-0$
	$x<\frac{-3-a}{2-a}$	$0x>-3$
		Ovde je svaki $x\in R$ rešenje

Rešenje bi zapisali:

Za $a<2 \Rightarrow \quad x\in\left(\frac{-3-a}{2-a},\infty\right)$

Za $a=2 \Rightarrow \quad x\in R$

Za $a>2 \Rightarrow \quad x\in\left(-\infty,\frac{-3-a}{2-a}\right)$

4) Rešiti nejednačine:

a) $(x-1)\cdot(x-4)>0$
b) $(x+3)\cdot(x-5)\leq 0$

Kod ovog tipa nejednačina koristićemo da je:

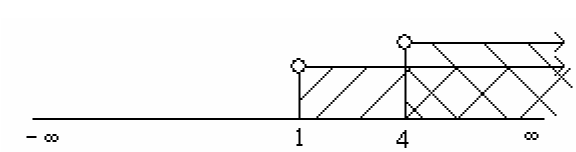
$$A\cdot B>0 \quad\Leftrightarrow\quad (A>0,B>0) \ \vee\ (A<0,B<0)$$
$$A\cdot B<0 \quad\Leftrightarrow\quad (A>0,B<0) \ \vee\ (A<0,B>0)$$

Naravno iste "šablone" koristimo i za znakove $\geq$ i $\leq$ a i za $\frac{A}{B}>0$ i $\frac{A}{B}<0$ **gde još vodimo računa da je** $B\neq 0$ **.**

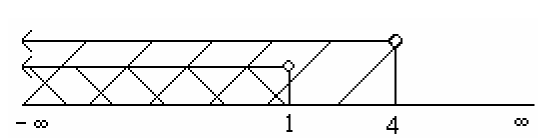
a) $(x-1)(x-4)>0$

$$(x-1>0, x-4>0) \quad\vee\quad (x-1<0, x-4<0)$$
$$(x>1, x>4) \quad\vee\quad (x<1, x<4)$$

Sada rešenja ''spakujemo'' na brojevnoj pravoj!!!



$x\in(4,\infty)$



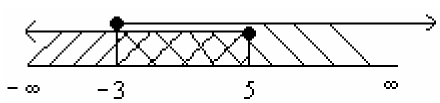
$x\in(-\infty,1)$

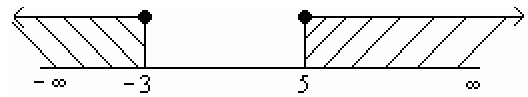
Rešenje je $x\in(-\infty,1)\cup(4,\infty)$

b) $(x+3)\cdot(x-5)\leq 0$

$(x+3\geq 0, x-5\leq 0)\quad \vee \quad (x+3\leq 0, x-5\geq 0)$

$(x\geq -3, x\leq 5)\quad \vee \quad (x\leq -3, x\geq 5)$





$x\in[-3,5]$ $\quad\quad$ $\varnothing$ prazan skup

Dakle, konačno rešenje je $x\in[-3,5]$

5) Reši nejednačinu $\dfrac{6-x}{3-x}<-2$

PAZI: Da bi koristili ''šablon'' na desnoj strani mora da je nula, pa ćemo zato -2 prebaciti na levu stranu!!!

$$\frac{6-x}{3-x}<-2$$

$$\frac{6-x}{3-x}+2<0$$

$$\frac{6-x+2(3-x)}{3-x}<0$$

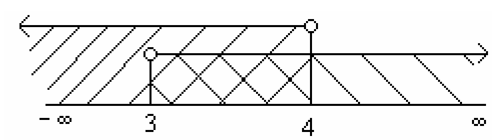
$$\frac{6-x+6-2x}{3-x}<0$$

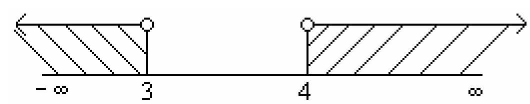
$$\frac{12-3x}{3-x}<0$$ $\rightarrow$ sad može ''šablon''

$(12-3x>0\wedge 3\text{ - x}<0)$ ili $(12-3x<0\wedge 3\text{ - x}>0)$

$(-3x>-12\wedge \text{-x}<-3)$ $\quad$ $(-3x<-12\wedge \text{-x}>-3)$

$(x<4, \text{x}>3)$ ili $(x>4, \text{x}<3)$





$x\in(3,4)$ $\rightarrow$konačno rešenje $\quad\quad$ prazan skup

6) Rešiti nejednačinu: (po n)

$$-3<\frac{n-1}{n+1}<5$$

Rešenje:

Ovde moramo rešiti 2 nejednačine, pa ćemo “upakovati’’ njihova rešenja.

Prva nejednačina:

$$-3<\frac{n-1}{n+1} \qquad \text{To jest:} \qquad 0<\frac{n-1}{n+1}+3$$

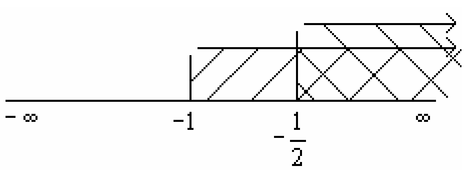
$$0<\frac{n-1+3n+3}{n+1}$$

$$0<\frac{4n+2}{n+1}$$

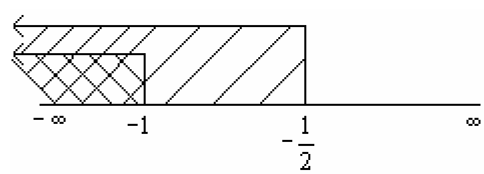
Dakle: $\frac{4n+2}{n+1}>0$

$$(4n+2>0 \wedge \mathrm{n}+1>0) \quad \vee \quad (4n+2<0 \wedge \mathrm{n}+1<0)$$

$$(n>-\frac{1}{2} \wedge \mathrm{n}>-1) \quad \vee \quad (n<-\frac{1}{2} \wedge \mathrm{n}<-1)$$



$$n\in\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$$



$$n\in(-\infty,-1)$$

Za I deo rešenje je $n\in(-\infty,-1)\cup\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$

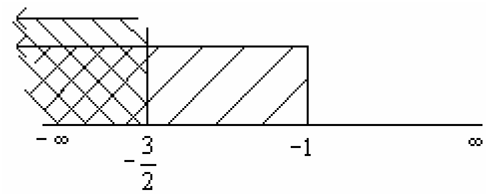
Druga nejednačina:

$$\frac{n-1}{n+1}<5 \quad\Rightarrow\quad \frac{n-1}{n+1}-5<0 \quad\Rightarrow\quad \frac{n-1-5n-5}{n+1}<0$$

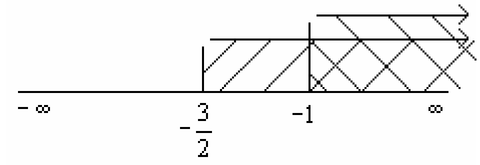
Dakle: $\frac{-4n-6}{n+1}<0$

$$(-4n-6>0 \wedge \mathrm{n}+1<0) \quad \vee \quad (-4n-6<0 \wedge \mathrm{n}+1>0)$$

$$(n<-\frac{3}{2} \wedge \mathrm{n}<-1) \quad \vee \quad (n>-\frac{3}{2} \wedge \mathrm{n}>-1)$$



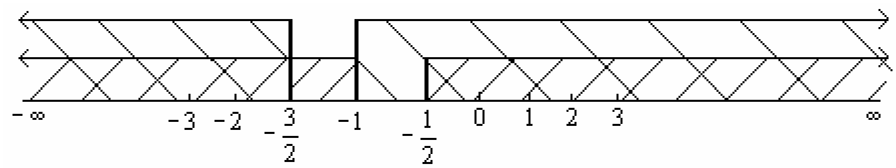
$$n \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$$



$$n \in (-1, \infty)$$

Za II deo rešenje je $n \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup (-1, \infty)$

''Upakujmo'' sada I i II rešenje da bi dobili konačno rešenje ove dvojne nejednačine:



Rešenje prve nejednačine smo šrafirali udesno, a druge ulevo …Na taj način vidimo gde se seku, odnosno gde je konačno rešenje…

Dakle, konačno rešenje je:

$$\boxed{n \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)}$$

<u>NAPOMENA:</u>

Umesto šablona ovde smo mogli koristiti i " tablično'' rešavanje koje je detaljno objašnjeno u delu kvadratne nejednačine.