RASTAVLJANJE NA ČINIOCE – MALO TEŽI PRIMERI

U prethodnom fajlu smo naučili osnovne ideje o tome kako dati polinom rastaviti na činioce.

U ovom delu ćemo naučiti da kombinujemo metode.....

Primer 1.

Rastaviti na faktore sledeće polinome:

a) $a^2+2ab+b^2-c^2$
b) $a^2b^2+c^2-2abc-25$
c) $4-x^2+2xy-y^2$
d) $16m^2-9x^2+12xy-4y^2$

Rešenje:

a) $a^2+2ab+b^2-c^2 \rightarrow$ prva tri člana nam daju pun kvadrat

$=(a+b)^2-c^2 \rightarrow$ sad upotrebimo razliku kvadrata

$=(a+b-c)(a+b+c)$

b) $a^2b^2+c^2-2abc-25 \rightarrow$ prva tri člana daju pun kvadrat, ali ćemo prvo da ih pretumbamo malo da bi bilo jasnije....

$a^2b^2+c^2-2abc-25=$

$\underbrace{a^2b^2}_{I^2}-\underbrace{2abc}_{2\cdot I\cdot II}+\underbrace{c^2}_{II^2}-25=$

$(ab-c)^2-5^2=$ sad upotrebimo razliku kvadrata

$(ab-c-5)(ab-c+5)$

c) $4-x^2+2xy-y^2 \rightarrow$ zadnja tri daju pun kvadrat, ali moramo izvući minus ispred zagrade ....

$=4-(x^2-2xy+y^2)$

$=4-(x-y)^2$

$=2^2-(x-y)^2=(2-(x-y))(2+(x-y)) \rightarrow$ pazite, mora zagrada

$=(2-x+y)(2+x-y)$

d) $16m^2 - 9x^2 + 12xy - 4y^2 \rightarrow$ slično kao u prethodnom primeru, zadnja tri nam daju pun kvadrat ali moramo izvući minus ispred zagrade...

$$16m^2 - \left(9x^2 - 12xy + 4y^2\right) =$$
$$(4m)^2 - (3x - 2y)^2 =$$
$$\left(4m - (3x - 2y)\right)\left(4m + (3x - 2y)\right) =$$
$$(4m - 3x + 2y)(4m + 3x - 2y)$$

Primer 2.

Rastaviti na činioce sledeće polinome:

a) $x^4 + 4$
b) $a^4 + 4b^4$

Rešenje:

a) $x^4 + 4 \rightarrow$ razmišljamo ovako: ovo su prvi i treći član u kvadratu binoma, a fali nam srednji član!
Dakle $I^2 = x^4 \rightarrow \boxed{I = x^2}$ i $II^2 = 4 \rightarrow \boxed{II = 2}$
Dodajemo i oduzimamo srednji član, to jest: $2 \cdot I \cdot II = 2 \cdot x^2 \cdot 2 = 4 \cdot x^2$
Vratimo se na zadatak....
$$x^4 + 4 =$$
$$x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = \text{Prva tri sad daju pun kvadrat}$$
$$(x^2 + 2)^2 - 4x^2 = \text{Dalje primenjujemo razliku kvadrata}$$
$$(x^2 + 2)^2 - (2x)^2 =$$
$$(x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x) =$$
$$(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$$

b) a^4+4b^4 Slično kau prethodnom primeru:

$$\underset{I^2}{a^4}+\underset{II^2}{4b^4} \to I=a^2 \wedge II=2b^2$$

Dodajemo i oduzimamo $2\cdot I\cdot II=2\cdot a^2\cdot 2b^2=4a^2b^2$

$$a^4+4b^4=$$

$$a^4+4a^2b^2+4b^4-4a^2b^2=$$

$$\left(a^2+2b^2\right)^2-(2ab)^2=$$

$$\left(a^2+2b^2-2ab\right)\left(a^2+2b^2+2ab\right)$$

Primer 3.

Rastaviti na faktore sledeće polinome:

a) x^4+x^2+1

b) $a^4+a^2b^2+b^4$

Rešenje:

a) $x^4+x^2+1 \to \underset{I^2}{x^4}+x^2+\underset{II^2}{1} \to I=x^2 \wedge II=1$

U ovoj situaciji nam nedostaje samo 2 ispred x^2 da bi imali pun kvadrat.

Dakle, dopišemo dvojku kod x^2 i oduzmemo jedno x^2

$$x^4+2x^2+1-x^2=\text{sklopimo prva tri u pun kvadrat}$$

$$\left(x^2+1\right)^2-x^2=\text{sad razlika kvadrata}$$

$$\left(x^2+1-x\right)\left(x^2+1+x\right)=$$

$$\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)$$

b) $a^4+a^2b^2+b^4$ i ovde fali dvojka kod srednjeg člana…..

$$
\begin{aligned}
&a^4+a^2b^2+b^4=\\
&a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2=\\
&\left(a^2+b^2\right)-(ab)^2=\\
&\left(a^2+b^2-ab\right)\left(a^2+b^2+ab\right)=\\
&\left(a^2-ab+b^2\right)\left(a^2+ab+b^2\right)
\end{aligned}
$$

Primer 4.

Rastaviti na faktore polinom $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$

Rešenje:

U ovakvim situacijama je zgodno uzeti smenu.

Kako je $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12=(\boxed{x^2+x+1})(\boxed{x^2+x+1}+1)-12$

Uzećemo smenu $x^2+x+1=t$

Sad novi polinom ‘po t’ izgleda

$$
\begin{aligned}
&t(t+1)-12=\text{njega rastavljamo na faktore}\\
&t^2+t-12=\\
&t^2-3t+4t-12=\\
&t(t-3)+4(t-3)=\\
&(t-3)(t+4)
\end{aligned}
$$

Sad vratimo smenu $x^2+x+1=t$

$$
\begin{aligned}
&(t-3)(t+4)=\\
&\left(x^2+x+1-3\right)\left(x^2+x+1+4\right)=\\
&\left(x^2+x-2\right)\left(x^2+x+5\right)=\\
&\left(x^2+2x-x-2\right)\left(x^2+x+5\right)=\\
&\left(x(x+2)-1(x+2)\right)\left(x^2+x+5\right)=\\
&\boxed{(x+2)(x-1)\left(x^2+x+5\right)}
\end{aligned}
$$

Primer 5.

Rastaviti na faktore polinom $9\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)-24\left(a+\frac{1}{a}\right)+34$

Rešenje:

I u ovoj situaciji ćemo uzimati smenu, ali je situacija malo teža...

$$a+\frac{1}{a}=t \to \text{ je smena, al odavde moramo izraziti } a^2+\frac{1}{a^2}$$

$$a+\frac{1}{a}=t.........kvadriramo$$

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=t^2$$

$$a^2+2\cdot \cancel{a}\cdot\frac{1}{\cancel{a}}+\left(\frac{1}{a}\right)^2=t^2$$

$$a^2+2+\frac{1}{a^2}=t^2 \to \boxed{a^2+\frac{1}{a^2}=t^2-2}$$

Vraćamo se na zadatak....

$$9\underbrace{\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)}_{\text{Ovo je } t^2-2}-24\underbrace{\left(a+\frac{1}{a}\right)}_{\text{Ovo je } t}+34=$$

$$9\left(t^2-2\right)-24t+34=$$

$$9t^2-18-24t+34=$$

$$9t^2-24t+16=\text{Ovo je pun kvadrat}$$

$$=\boxed{(3t-4)^2}$$

Sad vratimo smenu

$$a+\frac{1}{a}=t \to (3t-4)^2=\left(3(a+\frac{1}{a})-4\right)^2=\left(\frac{3a^2+3}{a}-4\right)^2=\boxed{\left(\frac{3a^2-4a+3}{a}\right)^2}$$