<u>Sistemi linearnih jednačina</u>

Pod sistemom od dve linearne jednačine sa dve nepoznate x i y podrazumevamo:

$$a_1x+b_1y=c_1$$
$$a_2x+b_2y=c_2$$

Ovo je takozvani "prost" sistem do koga uvek možemo doći ekvivalentnim transformacijama (opisane u jednačinama)
Ovde su a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2 dati realni brojevi (ponekad i parametri). Rešenje sistema je uredjeni par brojeva (x_0,y_0) za koji važi da je:

$$a_1x_0+b_1y_0=c_1$$
$$a_2x_0+b_2y_0=c_2$$

Sisteme možemo rešiti pomoću više metoda: zamena, suprotni koeficijenti, Gausova, pomoću determinanti, matricama, grafički itd.
Nama je najvažnije da tačno rešimo dati zadatak (problem) pa ćemo probati da vas to naučimo.
Napomenimo samo da dati sistem može imati: jedinstveno rešenje, beskonačno mnogo rešenja **(neodređen)** ili pak da nema rešenja **(nemoguć).**

<u>Primer 1.</u>

Reši sistem: $\begin{aligned}2x+3y&=7\\3x-6y&=7\end{aligned}$

$$2x+3y=7/\cdot 2$$
$$3x-6y=7$$

Najlakše je da ispred x (ili y) napravimo da budu isti brojevi a suprotnog znaka, pa onda te dve jednačine saberemo. Zato ćemo prvu jednačinu pomnožiti sa 2.

$$+\begin{cases}4x+6y=14\\3x-6y=7\end{cases}$$
$$7x=21$$
$$x=\frac{21}{7}$$
$$\boxed{x=3}$$

Kad nadjemo jedno rešenje, vratimo se u jednu od jednačina (bilo koju) da nadjemo drugo rešenje.

$$2x+3y=7$$
$$2\cdot 3+3y=7$$
$$6+3y=7$$
$$3y=7-6$$
$$3y=1$$
$$\boxed{y=\frac{1}{3}}$$

Ovde je rešenje jedinstveno: $(x,y)=\left(3,\frac{1}{3}\right)$

Primer 2.

Reši sistem:
$$\begin{aligned} 5x+y&=-1\\ -10x-2y&=2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x+y&=-1 \;\; ...../(-2) \\ -10x-2y&=2 \end{aligned}$$ Pomnožimo prvu jednačinu sa (-2)

$$\begin{aligned} +10x+2y&=-2\\ -10x-2y&=2\\ \hline 0&=0 \end{aligned}$$ Ovde imamo situaciju da su se svi "skratili".

To nam govori da sistem ima beskonačno mnogo rešenja. Da bi "opisali" ta rešenja, iz jedne od jednačina izrazimo x (ili y), naravno, šta nam je lakše:

$$5x+y=-1 \rightarrow \boxed{y=-1-5x}$$

Sada su rešenja: $(x,y)=(x,-1-5x)$ gde $x\in R$

Primer 3. **Reši sistem:**
$$\begin{aligned} 2x+3y&=4\\ -2x-3y&=5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x+3y&=4\\ -2x-3y&=5\\ \hline 0&=9 \end{aligned}$$ Saberemo ih odmah.

U ovoj situaciji kažemo da je sistem **nemoguć**, odnosno **nema rešenja.**

Primer 4. **Reši sistem:**
$$\begin{aligned} \frac{5x-1}{6}+\frac{3y-1}{10}&=3\\ \frac{11-x}{6}+\frac{11+y}{4}&=3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{5x-1}{6}+\frac{3y-1}{10}&=3..../\cdot 30\\ \frac{11-x}{6}+\frac{11+y}{4}&=3..../\cdot 12 \end{aligned}$$ Odmah uočimo da ovaj sistem nije “prost’’, pa moramo najpre da “napravimo’’ da bude.

$$5(5x-1)+3(3y-1)=90$$
$$2(11-x)+3(11+y)=36$$

$$25x-5+9y-3=90$$
$$22-2x+33+3y=36$$

$$25x+9y=90+5+3$$
$$-2x+3y=-19$$

$$25x+9y=98$$
$$-2x+3y=-19..../\cdot(-3)$$

Napravili smo "prost'' sistem.

$$\left.\begin{array}{l}25x+9y=98\\6x-9y=57\end{array}\right\}+$$

$$31x=155$$
$$\boxed{x=5}$$

Vratimo se sad u jednu od jednačina iz prostog sistema:

$$-2x+3y=-19$$
$$-2\cdot 5+3y=-19$$
$$3y=-19+10$$
$$3y=-9$$
$$\boxed{y=-3}$$

dakle $(x,y)=(5,-3)$

Primer 5.

$$\frac{14}{x}+\frac{24}{y}=10$$
$$\frac{7}{x}-\frac{18}{y}=-5$$

Uočavamo da su ovde nepoznate u imeniocu. U takvoj situaciji najbolje je uzeti smene: $\frac{1}{x}=a$ i $\frac{1}{y}=b$

$$14\cdot\frac{1}{x}+24\cdot\frac{1}{y}=10$$
$$7\cdot\frac{1}{x}-18\cdot\frac{1}{y}=-5$$

$$14a+24b=10$$
$$7a-18b=-5 \quad .../(-2)$$

Ovo je prost sistem "po *a* i *b*'' Pomnožimo drugu jednačinu sa (-2)

$$\left.\begin{array}{l}\cancel{14a}+24b=10\\ \cancel{-14a}+36b=10\end{array}\right\}+$$

$$60b=20$$

$$b=\frac{20}{60}$$

$$\boxed{b=\frac{1}{3}}$$

$$7a-18b=-5$$

$$7a-18\cdot\frac{1}{3}=-5$$

$$7a-6=-5$$

$$7a=-5+6$$

$$7a=1$$

$$\boxed{a=\frac{1}{7}}$$

Vratimo se u smene da nadjemo x i y.

$$\frac{1}{x}=a, \qquad \frac{1}{y}=b$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{7}, \qquad \frac{1}{y}=\frac{1}{3}$$

$$x=7 \qquad y=3$$

$$\boxed{(x,y)=(7,3)}$$

Primer 6.

Reši sistem:

$$ax-9y=14a$$
$$2ax+3y=7a$$

Rešenje:

$ax-9y=14a$ Ovde primećujemo da postoji parameter ***a*.** Budimo oprezni!

$2ax+3y=7a\ldots/\cdot 3$

$$\left.\begin{array}{l}ax\cancel{-9y}=14a\\ 6ax\cancel{+9y}=21a\end{array}\right\}+$$

$$7ax=35a$$

$x=\dfrac{35a}{7a}$ $\rightarrow$ **PAZI:** a može da skratimo samo ako je $a\neq 0$ (to je uslov)

$$\boxed{x=5}$$

$$ax-9y=14a$$

$$5a-9y=14a$$

$$-9y=14a-5a$$

$$-9y=9a$$

$$\boxed{y=-a}$$

Rešenja su $(x, y) = (5, -a)$ **uz uslov** $a \neq 0$

Šta se dešava ako je $a = 0$?

Zamenimo tu vrednost u početni sistem:

$$\begin{array}{l} 0 \cdot x - 9y = 0 \\ 0 \cdot x + 3y = 0 \\ \hline \end{array}$$

Ovde se vidi da je $\boxed{y = 0}$ dok x može biti bilo koji broj.

Pa je sistem **neodredjen**, odnosno ima beskonačno mnogo rešenja.

Ta rešenja ćemo opisati sa :

$(x, y) = (x, 0) \qquad x \in R$

U daljem izlaganju ćemo se upoznati sa rešavanjem sistema linearnih jednačina sa tri nepoznate.

Sistem tri jednačine sa tri nepoznate

I ovde imamo više metoda za rešavanje.

Metoda zamene je jedna od njih. Sledeći primer ćemo rešiti na dva načina, najpre metodom zamene. Iz jedne od datih jednačina izrazimo jednu nepoznatu , pa zamenimo u preostale dve.

Primer 7. Reši sistem

$$\begin{array}{l} x + 2y - 5z = 6 \\ -2x + y + 2z = 5 \\ -3x + 3y - 4z = 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + 2y - 5z = 6 \rightarrow x = 6 - 2y + 5z \\ -2\boxed{x} + y + 2z = 5 \\ -3\boxed{x} + 3y - 4z = 8 \\ \hline x = 6 - 2y + 5z \\ -2(6 - 2y + 5z) + y + 2z = 5 \\ -3(6 - 2y + 5z) + 3y - 4z = 8 \\ \hline x = 6 - 2y + 5z \\ -12 + 4y - 10z + y + 2z = 5 \\ -18 + 6y - 15z + 3y - 4z = 8 \\ \hline x = 6 - 2y + 5z \\ 5y - 8z = 17 \\ 9y - 19z = 26 \\ \hline \end{array}$$

Sad iz jedne od dve jednačine koje su po " y i z" izrazimo jednu nepoznatu i zamenimo u drugu jednačinu:

$x = 6 - 2y + 5z$

$5y - 8z = 17 \to 5y = 17 + 8z \to \boxed{y = \frac{17+8z}{5}}$

$\underline{9\boxed{y} - 19z = 26}$

$x = 6 - 2y + 5z$

$y = \frac{17+8z}{5}$

$\underline{9 \cdot \frac{17+8z}{5} - 19z = 26..../*5}$

$x = 6 - 2y + 5z$

$y = \frac{17+8z}{5}$

$\underline{153 + 72z - 95z = 130}$

$x = 6 - 2y + 5z$

$y = \frac{17+8z}{5}$

$\underline{-23z = -23} \to \boxed{z = 1}$

Sad vrednost za *z* vratimo da najpre nadjemo *y*, pa zatim tražimo i *x*.

$\boxed{z = 1}$

$x = 6 - 2y + 5z$

$\underline{y = \frac{17+8\cdot 1}{5}}$

$z = 1$

$y = 5$

$\underline{x = 6 - 2y + 5z}$

$z = 1$

$y = 5$

$\underline{x = 6 - 2\cdot 5 + 5\cdot 1}$

$z = 1$

$y = 5$

$x = 1$

Rešenje je uredjena trojka : $(x, y, z) = (1, 5, 1)$

Evo sada i drugog načina:

$$\begin{aligned} x+2y-5z&=6 \\ -2x+y+2z&=5 \\ -3x+3y-4z&=8 \end{aligned}$$

Najlakše je da izvučemo I i II, I i III jednačinu i oslobodimo se od **iste** nepoznate. Tako dobijemo **s**istem 2 jednačine sa 2 nepoznate

$$\begin{aligned} x+2y-5z&=6 /\cdot 2 \\ -2x+y+2z&=5 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \cancel{2x}+4y-10z&=12 \\ \cancel{-2x}+y+2z&=5 \end{aligned}\right\}+$$

$$5y-8z=17$$

$$\begin{aligned} x+2y-5z&=6 /\cdot 3 \\ -3x+3y-4z&=8 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \cancel{3x}+6y-15z&=18 \\ \cancel{-3x}+3y-4z&=8 \end{aligned}\right\}+$$

$$9y-19z=26$$

Sada uzimamo ove dve jednačine i nadjemo nepoznate y i z.

$$\begin{aligned} 5y-8z&=17 /\cdot 9 \\ 9y-19z&=26 /\cdot(-5) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} 45y-72z&=153 \\ -45y+95z&=-130 \end{aligned}\right\}+$$

$$23z=23$$

$$\boxed{z=1}$$

$$5y-8z=17$$

$$5y-8=17$$

$$5y=25$$

$$\boxed{y=5}$$

kada nadjemo 2 nepoznate vraćamo se u jednu od prve tri jednačine, (bilo koju).

$$x+2y-5z=6$$

$$x+2\cdot 5-5\cdot 1=6$$

$$x+10-5=6$$

$$x=6-10+5$$

$$\boxed{x=1}$$

$$\boxed{(x,y,z)=(1,5,1)}$$

Primer 8. Reši sistem

$$2x-3y+z=-9$$
$$5x+y-2z=12$$
$$x-2y-3z=1$$

Izdvajamo (I i II) i (I i III). Uočimo da je sad lakše da se oslobodimo od nepoznate z.

$$2x-3y+z=-9/\cdot 2 \qquad 2x-3y+z=-9/\cdot 3$$
$$5x+y-2z=12 \qquad x-2y-3z=1$$

$$4a-6y+2z=-18 \qquad 6x-9y+3z=-27$$
$$5x+y-2z=12 \qquad x-2y-3z=1$$

$$9x-5y=-6 \qquad 7x-11y=-26$$

Sad uzimamo ove dve jednačine i nadjemo x i y.

$$9x-5y=-6/\cdot(-7)$$
$$7x-11y=-26/\cdot 9$$

$$-63x+35y=42$$
$$63x-99y=-234$$

$$-64y=-192$$
$$\boxed{y=3}$$
$$9x-5\cdot 3=-6$$
$$9x=-6+15$$
$$9x=9$$
$$\boxed{x=1}$$

Sad se vraćamo u početni sistem: (u treću jednačinu)

$$x-2y-3z=1$$
$$1-2\cdot 3-3z=1$$
$$1-6-3z=1$$
$$-3z=1+5$$
$$-3z=6$$
$$\boxed{z=-2}$$

$$\boxed{(x,y,z)=(1,3,-2)}$$

Sistemi jednačina imaju široku primenu na rešavanje različitih problema.

Naravno,potrebno je dobro proučiti problem, naći vezu izmedju nepoznatih i formirati sistem jednačina. Samo rešavanje sistema posle nije veliki problem.

9) Dva broja imaju osobinu da je zbir četvorostukog prvog broja i za 4 uvećanog drugog broja jednak 50, a razlika trostrukog prvog broja i polovine drugog broja jednaka je 22. Odrediti te brojeve.

Neka su x i y traženi brojevi.

Postavimo jednačine: $\begin{aligned} &4x+(y+4)=50 \\ &3x-\frac{y}{2}=22 \end{aligned}$ sad rešimo ovaj sistem:

$$\begin{aligned} &4x+(y+4)=50 \\ &3x-\frac{y}{2}=22/\cdot 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &4x+y=50-4 \\ &6x-y=44 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &4x+y=46 \\ &6x-y=44 \end{aligned}\right\}+$$

$$10x=90$$

$$\boxed{x=9}$$

$$\begin{aligned} &4x+y=46 \\ &36+y=46 \end{aligned}$$

$$\boxed{y=10}$$

10) Dva radnika mogu da završe neki posao za 8 časova. Desilo se da je prvi radio 6 časova, a drugi 9 časova i završili su $\frac{51}{56}$ deo posla. Za koliko časova može svaki odvojeno da završi taj posao?

Obeležimo:

x – vreme za koje prvi radnik završi posao

y – vreme za koje drugi radnik završi posao

Postavljamo sistem:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{8}$$
$$\frac{6}{x}+\frac{9}{y}=\frac{51}{56}$$

Uvodimo smene : $\frac{1}{x}=a$ i $\frac{1}{y}=b$

$$a+b=\frac{1}{8}/\cdot(-6)$$
$$6a+9b=\frac{51}{56}$$

$$-6a-6b=-\frac{6}{8}$$
$$6a+9b=\frac{51}{56}$$

Saberemo ih i potiremo -*6a* i +*6a*

$$3b=\frac{51}{56}-\frac{6}{8}$$
$$3b=\frac{51-42}{56}$$
$$3b=\frac{9}{56}/:3$$
$$\boxed{b=\frac{3}{56}}$$

$$a=\frac{1}{8}-\frac{3}{56}$$
$$a=\frac{7-3}{56}=\frac{4}{56}=\frac{1}{14}$$
$$\boxed{a=\frac{1}{14}}$$

Vratimo se u smenu:

$$\frac{1}{x}=a$$
$$\frac{1}{x}=\frac{1}{14}$$
$$x=14$$
$x=14$ časa

i

$$\frac{1}{y}=b$$
$$\frac{1}{y}=\frac{3}{56}$$
$$y=\frac{56}{3}$$
$$y=18\frac{2}{3}$$
$y=18$ časa i 40 minuta

11) Zbir godina majke i ćerke je 46. Posle 10 godina majka ce biti 2 puta starija od ćerke. Koliko godina sada ima majka a koliko ćerka?

Obeležimo sa:
x – godine majke
y – godine ćerke

Posle 10 godina:
majka → x+10 godina
ćerka → y+10 godina

$$x+y=46$$
$$x+10=2\cdot(y+10)$$

$$x+y=46$$
$$x+10=2y+20$$

$$x+y=46$$
$$x-2y=10/(-1)$$

$$x+y=46$$
$$-x+2y=-10$$

$$3y=36$$
$$\boxed{y=12}$$
$$x+12=46$$
$$\boxed{x=34}$$

Dakle, majka sada ima 34 godine a ćerka 12 godina.