RELACIJE

Relaciju možemo posmatrati kao povezivanje elemenata nekog skupa A sa elementima nekog skupa B ali za koju znamo da su elementi skupa A u nekoj vezi (relaciji) sa elementima skupa B.

Najčešće se takvo povezivanje (relacija) posmatra samo u okviru jednog skupa.

Recimo posmatramo skup svih učenika jedne škole – skup Š. Označimo sa $x\rho y$ činjenicu da se učenik $x \in Š$ poznaje sa učenikom $y \in Š$. Onda smo na taj način definisali jednu binarnu relaciju izmedju elemenata skupa Š, odnosno izmedju učenika te škole .

Definicija:

Neka je ρ podskup skupa $X \times Y$. Kaže se da je element $x \in X$ u relaciji sa elementom $y \in Y$ ako i samo ako je $(x, y) \in \rho$. Tada se piše $x\rho y$, ρ je **binarna relacija** izmedju elemenata skupa X i elemenata skupa Y.

Kako sve možemo predstaviti neku relaciju?

1. Možemo neposredno nabrajati uredjene parove koji su u toj relaciji. Medjutim , to ume da bude naporno....
2. Možemo koristiti tablicu relacije
3. Možemo koristiti graf relacije

Evo primera na kome ćemo probati da naučimo sve tri opcije.

Dat je skup $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ i relacija ρ definisana sa $x\rho y \overset{def.}{\Leftrightarrow} x / y$ (ovo je oznaka za x deli y)

Ajmo najpre da nabrojimo uredjene parove koji zadovoljavaju ovu relaciju.

Krenemo od 1.

On najpre deli sam sebe, 1:1=1 pa je (1,1) prvi uredjeni par, zatim 1 deli 2 , tj 2:1=2 pa je drugi uredjeni par (1,2), dalje znamo da je svaki broj deljiv sa 1 pa su uredjeni parovi : (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,6) za jedinicu.

Ovo znači da je $1\rho 1, 1\rho 2, 1\rho 3, 1\rho 4, 1\rho 6$.

Za 2 imamo:

2 ne deli 1 (1:2 = 0,5) , 2 deli 2 , 2 deli 4 i 2 deli 6 pa su uredjeni parovi (2,2) , (2,4) i (2,6)

Za 3 imamo:

3 ne deli 1, ne deli 2, ne deli 4 pa zaključujemo (3,3) i (3,6) su parovi za trojku.

Za 4 i 6 je jasno da je $4\rho 4$ i $6\rho 6$ odnosno ovde imamo uredjene parove (4,4) i (6,6).

Sad zapišemo sve uredjene parove:

$$\rho = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,6), (2,2),(2,4),(2,6), (3,3),(3,6), (4,4),(6,6)\} \subset A\times A$$

Ako želimo da ovo predstavimo tablicom, radimo sledeće:

Napravimo tablicu 6 puta 6 (jer ima 5 elementa)

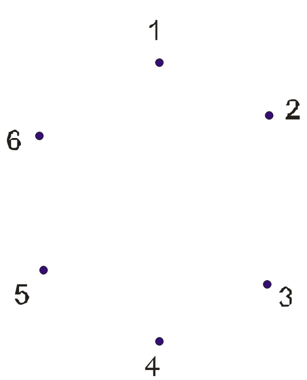
ρ	1	2	3	4	6
1					
2					
3					
4					
6					

Ako su dva elementa u relaciji, stavimo T a ako nisu u relaciji stavljamo $\perp$.

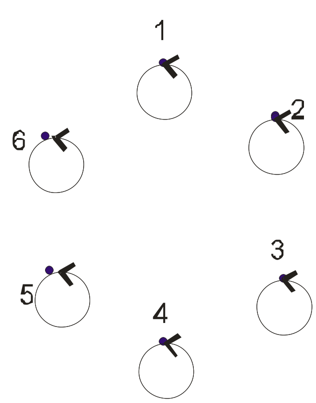
ρ	1	2	3	4	6
1	T	T	T	T	T
2	⊥	T	⊥	T	T
3	⊥	⊥	T	⊥	T
4	⊥	⊥	⊥	T	⊥
6	⊥	⊥	⊥	⊥	T

Na ovaj način smo dobili tablicu relacije.

Ako profesor traži graf relacije, radimo sledeće:

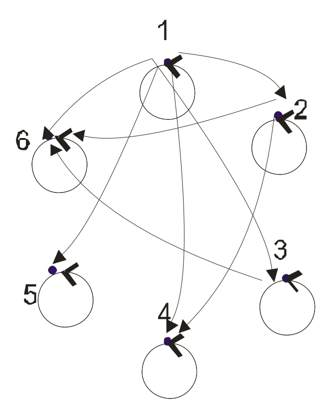


slika 1



svaki je u relaciji
sam sa sobom

slika 2.



ko je s kim u relaciji

slika 3.

Napišemo sve elemente kao da pripadaju kružnici (ne mora baš idealna kružnica….) (slika 1.)

Činjenicu da je svaki u relaciji sam sa sobom na grafu predstavljamo tako što napravimo kružić sa strelicom. (slika 2.)

Zatim gledamo ko je s kim u relaciji . Kako je 1 u relaciji sa 2 , to predstavimo malo zakrivnjenom linijom sa strelicom prema 2, onda je 1 u relaciji sa 3 pa nacrtamo liniju sa strelicom od 1 ka 3 i tako dalje.

Na taj način smo napravili graf relacije!

<u>Osobine relacija</u>

Posmatrajmo relaciju $\rho \subset A \times A$. Za relaciju ρ kažemo da je :

i) **(R) Refleksivna** ako je $(\forall x \in A)(x \rho x)$ t.j. svaki je u relaciji sam sa sobom .

ii) **(S) Simetrična** ako je $(\forall x, y \in A)(x \rho y \Rightarrow y \rho x)$ t.j. ako je x u relaciji sa y , onda je i y u relaciji sa x

iii) **(AS) Antisimetrična** ako $(\forall x, y \in A)(x \rho y \wedge y \rho x \Rightarrow x = y)$ t.j. ako je x u relaciji sa y i y u relaciji sa x, to znači da su oni jednaki.

iv) **(T) Tranzitivna** ako $(\forall x, y, z \in A)(x \rho y \wedge y \rho z \Rightarrow x \rho z)$ t.j. ako je prvi u relaciji sa drugim i drugi sa trećim, onda je prvi u relaciji sa trećim.

<u>Relacija ekvivalencije</u>

Binarna relacija $\rho \subset A \times A$ je relacija ekvivalencije ako i samo ako ima osobine:

(R) Refleksivna ako je $(\forall x \in A)(x \rho x)$ t.j. svaki je u relaciji sam sa sobom .

(S) Simetrična ako je $(\forall x, y \in A)(x \rho y \Rightarrow y \rho x)$ t.j. ako je x u relaciji sa y , onda je i y u relaciji sa x

(T) Tranzitivna ako $(\forall x, y, z \in A)(x \rho y \wedge y \rho z \Rightarrow x \rho z)$ t.j. ako je prvi u relaciji sa drugim i drugi sa trećim, onda je prvi u relaciji sa trećim.

Skraćeno, profesori ovu relaciju obeležavaju **RST.**

Primer 1.

Relacija " = " (**jednakost**) iz skupa R (realnih brojeva) je relacija ekvivalencije. Zašto?

Ispitajmo koje osobine ona zadovoljava.....

1. $(\forall x \in R)(x = x)$ refleksivna je jer je svaki broj jednak sam sa sobom

2. $(\forall x, y \in R)(x \rho y \Rightarrow y \rho x)$ simetrična je

3. $(\forall x, y, z \in R)(x \rho y \wedge y \rho z \Rightarrow x \rho z)$ tranzitivna je.

Primer 2.

Relacija **paralelnost** "$\|$" u skupu X svih pravih Euklidova prostora je relacija ekvivalencije.

Opet ispitujemo koje osobine postoje…..

1. $(\forall x \in X)(x \| x)$ refleksivna je jer je svaka prava paralelna sama sa sobom

2. $(\forall x, y \in X)(x \| y \Rightarrow y \| x)$ simetrična je jer ako je jedna prava paralelna sa drugom i druga je paralelna sa prvom

3. $(\forall x, y, z \in X)(x \| y \wedge y \| z \Rightarrow x \| z)$ tranzitivna je. Prva prava paralelna sa drugom i druga paralelna sa trećom, onda je i prva paralelna sa trećom.

Svaka relacija ekvivalencije stvara na skupu na kojem je data takozvane **klase ekvivalencije**.

Definicija:

Neka je ρ relacija ekvivalencije skupa X i $x \in X$. Skup svih elemenata iz X koji su u relaciji ρ sa X zove se

klasa ekvivalencije elemenata x i označava se sa C_x.

To bi matematički mogli da zapišemo $C_x = \{y \mid y \in X \wedge x \rho y\}$.

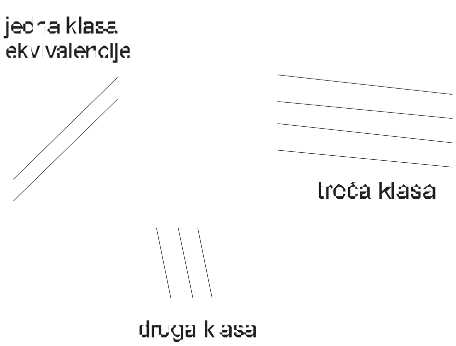
Zapamtimo da za klase ekvivalencije važi :

1) Svaka klasa ekvivalencije je neprazan skup (ima bar 1 element).

2) Svake dve različite klase ekvivalencije su medjusobno disjunktne, to jest nemaju zajedničkih elemenata.

Da bi ovo malo pojasnili, vratimo se na primer relacije **paralelnost** "$\|$" za koju smo dokazali da je relacija

ekvivalencije. Klase ekvivalencije ovde čine prave koje su medjusobno paralelne:



I tako dalje….

Sve prave koje su medjusobno paralelne čine klasu ekvivalencije....

<u>Relacija poretka</u>

Binarna relacija $\rho \subset A \times A$ je relacija poretka ako i samo ako ima osobine:

(R) Refleksivna ako je $(\forall x \in A)(x\rho x)$ t.j. svaki je u relaciji sam sa sobom .

(AS) Antisimetrična ako $(\forall x, y \in A)(x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y)$ t.j. ako je x u relaciji sa y i y u relaciji sa x, to znači da su oni jednaki.

(T) Tranzitivna ako $(\forall x, y, z \in A)(x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z)$ t.j. ako je prvi u relaciji sa drugim i drugi sa trećim, onda je prvi u relaciji sa trećim.

Skraćeno, ovu relaciju možemo zapisati **RAST**.

Primer 3.

Relacija $"\leq"$ (manje ili jednako) u skupu realnih brojeva je relacija poretka.

Ispitajmo osobine:

$(\forall x \in R)(x \leq x)$ svaki element je jednak sam sa sobom pa refleksivnost važi

$(\forall x, y \in R)(x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y)$ antisimetrična je

$(\forall x, y, z \in R)(x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z)$ tranzitivna je

Dakle, ovo je relacija poretka.

Sad ćemo uraditi nekoliko zadataka da još malo pojasnimo stvari.

Zadatak 1.

U skupu $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ definisana je relacija $x\rho y \Leftrightarrow x + y = 0$.

Nacrtati graf relacije i ispitati osobine relacije.

Rešenje:

Najpre malo razmislimo…. Relacija je definisana tako da kada saberemo dva broja iz skupa A njihov zbir bude 2.

Krenemo redom, od -2.

$-2 + (-2) = -4$ dakle, nisu u relaciji
$-2 + (-1) = -3$ nisu u relaciji
$-2 + 0 = -2$ nisu u relaciji
$-2 + 1 = -1$ nisu u relaciji
$-2 + 2 = 0$ u relaciji su
Zaključujemo da je -2 u relaciji samo sa 2, tj. $-2\rho 2$. Na grafu to je linija čija strelica ide ka 2.

Naravno, vi ne morate sve ovo da pišete, samo one koji su u relaciji…..

Sad razmišljamo za -1.

Očigledno je samo $-1+1=0$, pa je -1 u relaciji samo sa 1 tj. $-1\rho 1$ (strelica ka 1)

Dalje zaključujemo da je :

$$0+0=0 \to 0\rho 0$$
$$1+(-1)=0 \to 1\rho(-1)$$
$$2+(-2)=0 \to 2\rho(-2)$$

Imamo znači da je:

$$\rho=\{(-2,2),(-1,1),(0,0),(1,-1),(2,-2)\}$$

U tablici , to bi izgledalo ovako:

ρ	-2	-1	0	1	2
-2	⊥	⊥	⊥	⊥	T
-1	⊥	⊥	⊥	T	⊥
0	⊥	⊥	T	⊥	⊥
1	⊥	T	⊥	⊥	⊥
2	T	⊥	⊥	⊥	⊥

Da ispitamo sada osobine …..

Refleksivnost iz tablice možemo videti tako što na glavnoj dijagonali moraju biti sve T (tačno)

Naša relacija nije refleksivana, jer nije svuda tačno!

Simetričnost iz tablice možemo videti tako što su svi simetrični u odnosu na glavnu dijagonalu.

Glavna dijagonala

ρ	-2	-1	0	1	2
-2	⊥	⊥	⊥	⊥	T
-1	⊥	⊥	⊥	T	⊥
0	⊥	⊥	T	⊥	⊥
1	⊥	T	⊥	⊥	⊥
2	T	⊥	⊥	⊥	⊥

Prikazani samo neki koji su simetrični, da ne zakomplikujemo sliku….**Naša relacija jeste simetrična!**

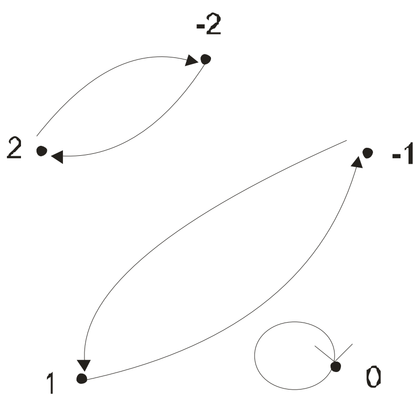
Za tranzitivnost nam treba :

(T) Tranzitivna ako $(\forall x, y, z \in A)(x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z)$ t.j. ako je prvi u relaciji sa drugim i drugi sa trećim, onda je prvi u relaciji sa trećim.

Kod nas je recimo $(-2,2)$ i $(2,-2)$ ali nije $(-2,-2)$ pa **nije tranzitivna!**

Dakle, od osobina imamo samo simetričnost.

Da vidimo kako bi izgledao graf:



Sa grafa refleksivnost " vidimo " tako što svaki element ima strelicu sam u sebe, a kod nas ima samo 0, pa tako

zaključimo da nije refleksivna.

Simetričnost na grafu " vidimo " tako što svaki element `vraća ` strelicu onome elementu koji je ``poslao``.

Naša relacija jeste simetrična!

Zadatak 2.

U skupu $S = \{x | x \in N \wedge x \le 7\}$ definisana je relacija $(\forall x, y \in S): x\rho y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod 3$.

Nacrtati graf relacije i ispitati osobine relacije.

Rešenje:

Profesori često vole da daju ovu relaciju kao zadatak.

Ova relacija se naziva relacija kongruencije. Šta to ustvari znači?

$x \equiv y \pmod 3$ znači da 3 deli razliku brojeva x i y , to jest, matematički zapisano : $3 | (x-y)$ ili se može reći da

brojevi x i y imaju isti ostatak pri deljenju sa 3. Neki profesori vole zapis $x \equiv_3 y$.

Vi naravno radite po komandi svog profe….

Na primer $x \equiv y \pmod 5$ znači da 5 deli razliku brojeva x i y , to jest $5 | (x-y)$

Da se vratimo na zadatak i odredimo najpre koji su elementi u skupu S:

$S = \{x | x \in N \wedge x \leq 7\} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

Sad razmišljamo (naravno redom) koja razlika je deljiva sa 3….

$1-1=0 \to 0:3=0$ pa je $1\rho 1$

$1-4=-3 \to -3:3=1 \to 1\rho 4$

$1-7=-6 \to -6:3=-2 \to 1\rho 7$

Sad za 2:

$2-2=0 \to 0:3=0$ pa je $2\rho 2$

$2-5=-3 \to -3:3=-1 \to 2\rho 5$

Nastavljamo tako postupak za svaki broj i dobijamo:

$\rho = \{(1,1),(1,4),(1,7),\ \ (2,2),(2,5),\ \ (3,3),(3,6),\ \ (4,1),(4,4),(4,7),\ \ (5,2),(5,5),\ \ (6,3),(6,6),\ \ (7,1),(7,4,),(7,7)\}$

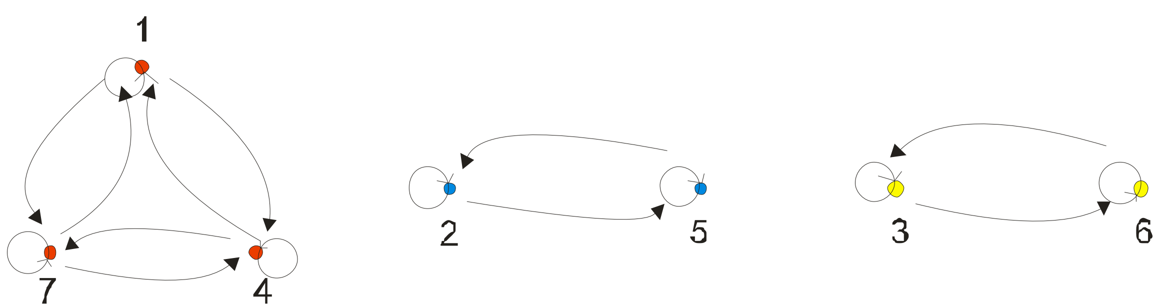
Sad da nacrtamo graf relacije.

Možemo kao i obično da poredjamo u krug brojeve i obeležavamo linijama sa strelicom koji je s kojim u relaciji.

Medjutim, ovde je **pametnije** da najpre uočite "grupice" koje su medjusobno u relaciji!

Jednu "grupicu" čine brojevi 1,4,7 , drugu grupicu 2 i 5 , treću 3 i 6.

Ovo je pametno raditi ovako jer odmah izdvajamo klase ekvivalencije!



Da ispitamo osobine:

1. $(\forall x \in S)(x \equiv x \pmod 3)$ refleksivna je , na grafu vidimo da svaki ima strelicu " u sebe"

2. $(\forall x, y \in S)(x \equiv y \pmod 3 \Rightarrow y \equiv x \pmod 3)$ simetrična je

3. $(\forall x, y, z \in S)(x \equiv y \pmod 3 \wedge y \equiv z \pmod 3 \Rightarrow x \equiv z \pmod 3)$ tranzitivna je.

Dakle, ovo je relacija ekvivalencije. Klase ekvivalencije su : $S / \rho = \{\{1,4,7\},\{2,5\},\{3,6\}\}$.

Zadatak 3.

U skupu Z celih brojeva definisana je relacija $(\forall x, y \in Z): x\rho y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod 3$.

Ispitati osobine relacije i odrediti odgovarajuće klase ekvivalencije.

Rešenje:

Ovo je ustvari zadatak isti kao prethodni, ali sada nam je dat ceo skup Z pa moramo da radimo uopšteno….

Refleksivnost

$(\forall x \in Z)(x \equiv x \pmod 3)$ Kako je x – x = 0, a 0:3=0 refleksivnost važi

Simetričnost

$(\forall x, y \in Z)(x \equiv y \pmod 3 \Rightarrow y \equiv x \pmod 3)$

$x \equiv y \pmod 3$ znači da je $x - y$ deljivo sa 3 odnosno možemo zapisati $x - y = 3k$

Sad krenemo od $y - x$ i malo prepravimo $y - x = -(x - y) = -3k$, odavde je $y \equiv x \pmod 3$

Znači da simetričnost važi.

Tranzitivnost

$(\forall x, y, z \in Z)(x \equiv y \pmod 3 \wedge y \equiv z \pmod 3 \Rightarrow x \equiv z \pmod 3)$

$x \equiv y \pmod 3$ znači da je $x - y$ deljivo sa 3 odnosno možemo zapisati $x - y = 3k$

$y \equiv z \pmod 3$ znači da je $y - z$ deljivo sa 3 odnosno možemo zapisati $y - z = 3p$

Da dokažemo da je $x \equiv z \pmod 3$.

Opet malo "trikče"!

$x - z = x - y + y - z = 3k + 3p = 3(k + p)$ pa je i ovo deljivo sa 3 to jest, tranzitivnost važi!

Dokazali smo da je ovo relacija ekvivalencije.

Šta bi bile klase ekvivalencije?

Prvu klasu bi činili brojevi $\{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, ...\}$ a to možemo uopšteno zapisati $\{3k \mid k \in Z\}$.

Nazovimo ovu klasu sa : $Z_0 = \{3k \mid k \in Z\}$

Drugu klasu bi činili brojevi $\{...., -5, -2, 1, 4, 7, 10, ...\}$ a nju možemo zapisati kao $Z_1 = \{3k + 1 \mid k \in Z\}$

Treću klasu bi činili brojevi $\{...., -4, -1, 2, 5, 8, 11, ...\}$ i to zapisujemo $Z_2 = \{3k + 2 \mid k \in Z\}$

Da rezimiramo:

Klase ekvivalencije su:

$$Z_0 = \{3k \mid k \in Z\}$$
$$Z_1 = \{3k+1 \mid k \in Z\}$$
$$Z_2 = \{3k+2 \mid k \in Z\}$$

a količnički skup je $Z / \rho = \{Z_0, Z_1, Z_2\}$